Aula 08: Simplex: Método das Duas Fases

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar o Método Simplex com Duas Fases para resolver problemas com variáveis artificiais.

Bibliografia:
- MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. Ed. Pioneira, 2007.

Introdução

Nas aulas anteriores, foram apresentados diversos artifícios matemáticos para que vários tipos de problemas possam ser modelados e resolvidos pelo algoritmo Simplex.

Entretanto, alguns daqueles artifícios provocavam o aparecimento das chamadas variáveis artificiais, que não possuem qualquer significado físico e precisam ser totalmente eliminadas de um problema para que ele seja resolvido a contento.

Infelizmente, o Médoto Simplex não elimina naturalmente estas variáveis, então precisaremos fazer um pequeno truque, que é o de executar duas vezes o Simplex: a primeira vez com uma função objetivo que visa eliminar as variáveis artificiais... ao fim desta fase, recuperamos a função objetivo original e continuamos o problema com a mesma.

1. O Modelo Matemático na Forma Padrão

Suponhamos que a modelagem de um problema já tenha sido resolvida, e o resultado seja o representado abaixo:

Função Objetivo:
[MAX] $4 * x_A + 3 * x_B$

Sujeito a:
$2 * x_A + 1 * x_B = 15$
$1 * x_B \geq 4$

Como visto anteriormente, as restrições do tipo "=" ganham uma variável artificial e as restrições do tipo "≥" ganham uma variável de excesso e uma variável artificial. Assim, o modelo pode ser reescrito como:

F.O.: [MAX] $4 * x_A + 3 * x_B$
S.A.: $2 * x_A + 1 * x_B + 1 * A_1 = 15$
$1 * x_B - 1 * x_E + 1 * A_2 = 4$

O que, colocando finalmente na forma padrão, fica:

F.O.: [MAX] $4 * x_A + 3 * x_B + 0 * x_E + 0 * A_1 + 0 * A_2$
S.A.: $2 * x_A + 1 * x_B + 0 * x_E + 1 * A_1 + 0 * A_2 = 15$
$0 * x_A + 1 * x_B - 1 * x_E + 0 * A_1 + 1 * A_2 = 4$

2. Eliminando as Variáveis Artificiais (Primeira Fase)

Bem, como o problema apresenta variáveis artificiais, o primeiro passo é eliminá-las, ou seja, encontrar uma solução viável em que tais variáveis não estejam na solução. Mas como fazer isso? Pensemos assim: se o valor das variáveis artificiais fosse 0 (zero), isso não seria o mesmo que se elas não estivessem na solução? Sim, seria! Então o truque é achar uma solução em que elas valham zero!

Para conseguir isso, vamos colocar a função objetivo atual de lado por um momento. Em seu lugar, usaremos esta outra função objetivo:

F.O.: [MIN] $1 * A_1 + 1 * A_2$

Observe que o menor valor possível para esta função objetivo é zero, considerando que nenhuma variável pode ter valor negativo, quando ambas as variáveis A_1 e A_2 valerão zero. Inicialmente vamos inverter o sinal desta função objetivo, para tornar o nosso problema um problema de maximização:

F.O.: [MAX] $- 1 * A_1 - 1 * A_2$

E vamos acrescentar as variáveis faltantes: x_A, x_B e x_E:

F.O.: [MAX] $0 * x_A + 0 * x_B + 0 * x_E - 1 * A_1 - 1 * A_2$

Colocando esta nova função objetivo juntamente com as restrições originais, temos o modelo matemático a ser resolvido na primeira fase:

F.O.: [MAX] $0 * x_A + 0 * x_B + 0 * x_E - 1 * A_1 - 1 * A_2$
S.A.: $2 * x_A + 1 * x_B + 0 * x_E + 1 * A_1 + 0 * A_2 = 15$
$0 * x_A + 1 * x_B - 1 * x_E + 0 * A_1 + 1 * A_2 = 4$

Sendo a solução inicial $X_A=X_B=X_E=0$, $A_1=15$ e $A_2=4$.

2.1. Construção do Primeiro Tableau

O primeiro passo é construir o primeiro Tableau. Lembremos que o número de linhas será o número de restrições mais quatro. Assim, em nosso problema teremos uma tabela de 6 linhas. O número de colunas é igual ao número de variáveis mais quatro, ou seja, em nosso caso, o tableau terá 9 colunas. O aspecto do primeiro tableau deve ser:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**A_1**	2	1	0	1	0	15	
0	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Calculemos as linhas Z e C-Z:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
-1	**A_1**	2	1	0	1	0	15	
-1	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z	-2	-2	1	-1	-1	-19	
	Linha C-Z	2	2	1	0	0		

A variável que entra pode ser tanto a x_A como a x_B, dado que ambas possuem o maior valor. Escolheremos aqui a variável x_A, e em seguida calcularemos a coluna bj/aij.

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
-1	**A_1**	2	1	0	1	0	15	7,5
-1	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	inf.
	Linha Z	-2	-2	1	-1	-1	-19	
	Linha C-Z	2	2	1	0	0		

Como 7,5 é menor que infinito, A_1 é a variável que sai:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
-1	**A_1**	2	1	0	1	0	15	7,5
-1	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	inf.
	Linha Z	-2	-2	1	-1	-1	-19	
	Linha C-Z	2	2	1	0	0		

2.2. Construção do Segundo Tableau

Primeiramente copiamos a maior parte das informações, menos os dados e a variável que saiu:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
-1	**A_2**							
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Acrescentamos a variável que entrou no lugar da que saiu, preenchendo também o c_j, usando para isso o valor que está acima da variável que entra na tabela:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**							
-1	**A_2**							
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Agora preencheremos a linha da variável que entrou. Note que a coluna da variável que entrou deve ter "1" na linha onde esta variável aparece e "0" em todas as outras linhas:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1						
-1	**A_2**	0						
	Linha Z							
	Linha C-Z							

No tableau anterior, é possível verificar que, na posição onde preciso de "1" (na linha onde entrou X_A), tenho um "2":

Primeiro Tableau

c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
-1	**A_1**	2	1	0	1	0	15	7,5

Para que o valor "2" *vire* "1", é preciso dividir esta linha toda por 2:

		X_A	X_B	X_E	A_1	A_2	b_j	
		1	1/2	0	1/2	0	15/2	

E agora posso colocá-la no segundo tableau:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1	1/2	0	1/2	0	15/2	
-1	**A_2**	0						
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Para a outra linha, entretanto, precisamos de um "0"... e no primeiro tableau já tínhamos um "0"! Basta então copiar a linha:

Primeiro Tableau

c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
-1	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	inf.

Copiando para o segundo Tableau, temos:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1	1/2	0	1/2	0	15/2	
-1	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Calculemos agora as linhas Z e C-Z:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1	1/2	0	1/2	0	15/2	
-1	**A_2**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z	0	-1	1	0	-1	-4	
	Linha C-Z	0	1	-1	-1	0		

Assim, é possível verificar qual é a variável que entra: X_B. Calculando a coluna bj/aij:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	A_1	A_2	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_A	1	1/2	0	1/2	0	15/2	15
-1	A_2	0	1	-1	0	1	4	4
	Linha Z	0	-1	1	0	-1	-4	
	Linha C-Z	0	1	-1	-1	0		

Como 4 é o menor valor, então A_2 é a variável que sai:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	A_1	A_2	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_A	1	1/2	0	1/2	0	15/2	15
-1	A_2	0	1	-1	0	1	4	4
	Linha Z	0	-1	1	0	-1	-4	
	Linha C-Z	0	1	-1	-1	0		

2.3. Construção do Terceiro Tableau

Primeiramente copiamos a maior parte das informações, menos os dados e a variável que saiu:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	A_1	A_2	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_A							
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Acrescentamos a variável que entrou no lugar da que saiu, preenchendo também o c_j, usando para isso o valor que está acima da variável que entra na tabela:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	A_1	A_2	b_j	b_j / a_{ij}
0	X_A							
0	X_B							
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Agora preencheremos a linha da variável que entrou. Note que a coluna da variável que entrou deve ter "1" na linha onde esta variável aparece e "0" em todas as outras linhas:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**		0					
0	**X_B**		1					
	Linha Z							
	Linha C-Z							

No tableau anterior, é possível verificar que, na posição onde preciso de "1" (na linha onde entrou X_B), já existe um "1"! Basta então copiar a linha:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**		0					
0	**X_B**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Para a outra linha, entretanto, precisamos de um "0"... mas no tableau anterior temos o valor "1/2". Será, então, necessário dividir a linha da variável que entrou por "-1/2" e posteriormente somá-la à linha que entrará na posição de X_A:

Do Segundo Tableau

c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1	1/2	0	1/2	0	15/2	15

Linha da variável que entrou no Tableau atual:

c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_B**	0	1	-1	0	1	4	

Linha da variável que entrou no Tableau atual multiplicada por -1/2...

		X_A	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
		0	-1/2	1/2	0	-1/2	-2	

Somando com a linha do segundo Tableau:

		X_A	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
		1	0	1/2	1/2	-1/2	11/2	

Agora basta copiar estes valores no tabelau atual:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1	0	1/2	1/2	-1/2	11/2	
0	**X_B**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z							
	Linha C-Z							

Agora é só calcular as linhas Z e C-Z:

		0	0	0	-1	-1		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**A_1**	**A_2**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_A**	1	0	1/2	1/2	-1/2	11/2	
0	**X_B**	0	1	-1	0	1	4	
	Linha Z	0	0	0	0	0	0	
	Linha C-Z	0	0	0	-1	-1		

Pronto! Primeira fase terminada e, observe, na solução atual temos apenas as variáveis X_A e X_B: A_1 e A_2 ficaram com valores zero!

Mas o problema acabou? Não! Terminamos apenas a primeira fase, que tinha objetivo de eliminar as variáveis artificiais. Agora vamos para a segunda fase, que tem o objeito de resolver, de fato, o problema original.

3. Resolvendo o Problema Modelado (Segunda Fase)

Para iniciar a segunda fase, podemos copiar o último tableau da primeira fase, mas com algumas pequenas modificações:

1) A linha da função objetivo deve ser substituída pela função objetivo original,

F.O.: [MAX] $4 * x_A + 3 * x_B + 0 * x_E + 0 * A_1 + 0 * A_2$

Lembrando de corrigir os valores da coluna c_j.

2) As colunas relativas a A_1 e A_2 podem ser eliminadas (já que não há sentido na volta de tais variáveis à solução).

3) E, obviamente, os valores das linhas Z e C-Z devem ser apagados. Fazendo estas modificações, temos:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	b_j	b_j / a_{ij}
4	X_A	1	0	1/2	11/2	
3	X_B	0	1	-1	4	
	Linha Z					
	Linha C-Z					

Este é o nosso primeiro tableau da segunda fase. Vamos calcular as linhas Z e C-Z:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	b_j	b_j / a_{ij}
4	X_A	1	0	1/2	11/2	
3	X_B	0	1	-1	4	
	Linha Z	4	3	-1	34	
	Linha C-Z	0	0	1		

Pronto, pelo cálculo, determinamos que a variável que entra é a variável X_E. Calculemos a coluna bj/aij:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	b_j	b_j / a_{ij}
4	X_A	1	0	1/2	11/2	11
3	X_B	0	1	-1	4	-4
	Linha Z	4	3	-1	34	
	Linha C-Z	0	0	1		

O menor valor, em princípio, é o -4. Entretanto, não posso considerar valores negativos neste campo. Assim, o valor considerado será o 11 e a variável que sai é X_A:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	X_A	X_B	X_E	b_j	b_j / a_{ij}
4	X_A	1	0	1/2	11/2	11
3	X_B	0	1	-1	4	-4
	Linha Z	4	3	-1	34	
	Linha C-Z	0	0	1		

Assim, teremos o primeiro passo do próximo tableau:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_E**					
3	**X_B**					
	Linha Z					
	Linha C-Z					

Na coluna X_E, precisamos de 1 na linha de X_E e 0 nas outras:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_E**			1		
3	**X_B**			0		
	Linha Z					
	Linha C-Z					

Na linha que saiu, tínhamos 1/2 na posição em que precisamos de 1. Assim, multiplicaremos a linha original inteira por 2, ao copiar para o novo tableau:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_E**	2	0	1	11	
3	**X_B**			0		
	Linha Z					
	Linha C-Z					

Novamente, para a linha da variável X_B precisamos de 0 na linha X_E, mas no tableau anterior temos -1 nesta posição. Para eliminar este -1, basta somar à linha anterior os valores da linha da variável que entrou:

Linha do Tableau anterior

c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
3	**X_B**	0	1	-1	4	-4

Linha da variável que entrou no tableau atual

c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_E**	2	0	1	11	

Somando ambas...

		X_A	X_B	X_E	b_j	
		2	1	0	15	

Copiando no tableau atual...

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_E**	2	0	1	11	
3	**X_B**	2	1	0	15	
	Linha Z					
	Linha C-Z					

Calculemos agora as linhas Z e C-Z:

		4	3	0		Linha
c_j	**Variáveis na Solução**	**X_A**	**X_B**	**X_E**	**b_j**	**b_j / a_{ij}**
0	**X_E**	2	0	1	11	
3	**X_B**	2	1	0	15	
	Linha Z	6	3	0	45	
	Linha C-Z	-2	0	0		

Como todos os valores são negativos ou zero, está finalizado o problema, cuja solução é $X_B = 15$, $X_E = 11$ e $X_A = 0$, com valor da função objetivo igual a 45, o que pode ser verificado que respeita as restrições do problema original:

Função Objetivo:
[MAX] $4 * x_A + 3 * x_B$

Sujeito a:
$2 * x_A + 1 * x_B = 15$
$1 * x_B \geq 4$

Bibliografia

MOREIRA, D.A. **Pesquisa Operacional: Curso Introdutório**. [S.I.]: Ed. Thomson Pioneira, 2007.