Pesquisa Operacional I

Solução Gráfica de Problemas de Programação Linear

Prof. Dr. Daniel Caetano

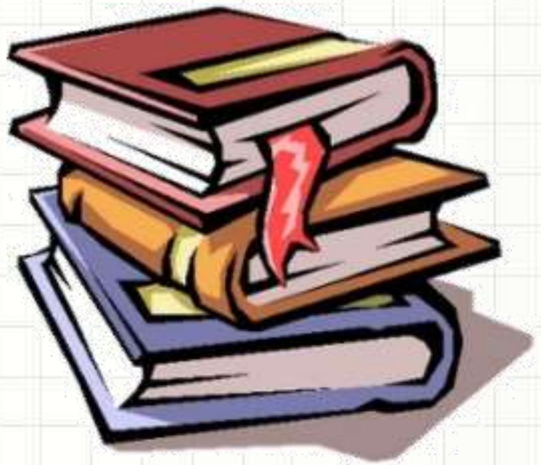
2019 - 2

Objetivos

- Compreender visualmente as restrições
- Compreender a lógica da solução desses problemas
- Compreender os diferentes tipos de situação de viabilidade de um modelo
- Conhecer as principais teoremas relacionados aos problemas de P.L.

- **Atividade da Aula 3 no SAVA!**

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Pesquisa Operacional I – Aula 3)
Biblioteca Virtual	• Iniciação à Pesquisa Operacional no Ambiente de Gestão, Cap. 2
Minha Biblioteca	• Pesquisa Operacional: Curso Introdutório, Cap. 2 • Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos, Cap. 3

O Processo da Pesquisa Operacional

Processo em 5 Etapas

1. Definição do Problema
   – O que se deseja atingir? Quais são as restrições?
2. Formulação do Modelo Quantitativo
   – Definir equações e inequações
3. Resolução do Modelo
   – Valores relevantes: **variáveis de decisão**
4. Validação e Consideração do Imponderável
   – Deve ser aplicável à realidade
5. Implementação da Solução
   – Transição suave

Retomando:

Otimização com Programação Linear

Otimização

- Problema de Operação
  - Maximizar ou Minimizar
  - Recursos finitos / limitados
  - Múltiplas maneiras de executar/organizar

Qual o Melhor?

Modelagem Matemática

- O quê se deseja maximizar ou minimizar?

Função Objetivo

Modelagem Matemática

- Limitações de Recursos / Processos
- Requisitos a serem atendidos

Modelagem Matemática

- Navio Panamax: 70.000 m³, 60.000 toneladas

Carga	Receita (R$/tonelada)	Fator Estiva m³/tonelada	Disponibilidade (toneladas)
A	40	3	30.000
B	30	4	-

- F.O.: $[max]\ 40.x_A + 30.x_B$ — Receita
- S.A.:
  - $1.x_A + 1.x_B \leq 60.000$ — Peso
  - $3.x_A + 4.x_B \leq 70.000$ — Volume
  - $1.x_A \leq 30.000$ — Disponibilidade
  - $1.x_A \geq 0$
  - $1.x_B \geq 0$ — Não Negatividade

Revisando:

Gráficos de Funções

Gráficos de Funções

- Existe uma representação gráfica para isso?

$$4x + 2y = 24$$

- Sim... Como fazer?

$$y = \frac{24 - 4x}{2} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y = 12 - 2x}$$

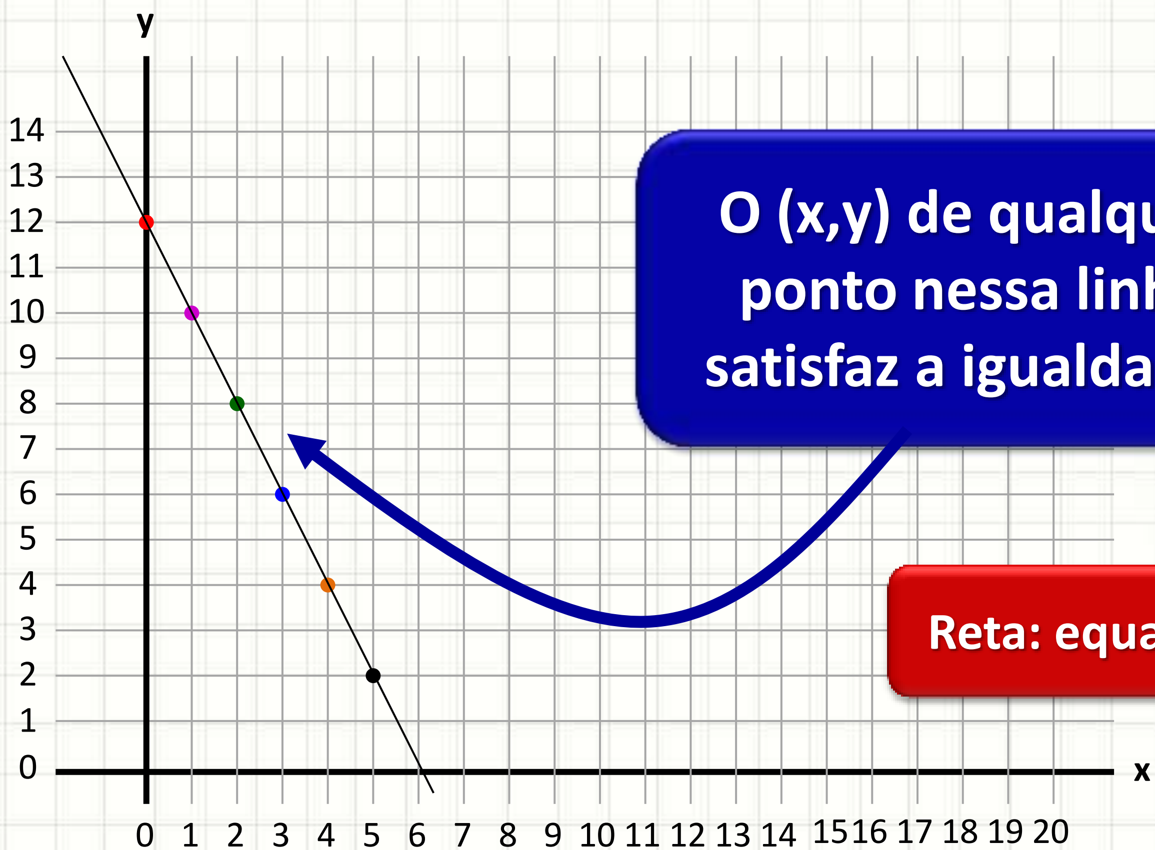
X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

Gráficos de Funções

- Gráfico de: $4x + 2y = 24$

Chocolate custa R$4,00 e o Bombom Custa R$2,00... E quero gastar R$ 24,00!

X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2



O (x,y) de qualquer ponto nessa linha satisfaz a igualdade!

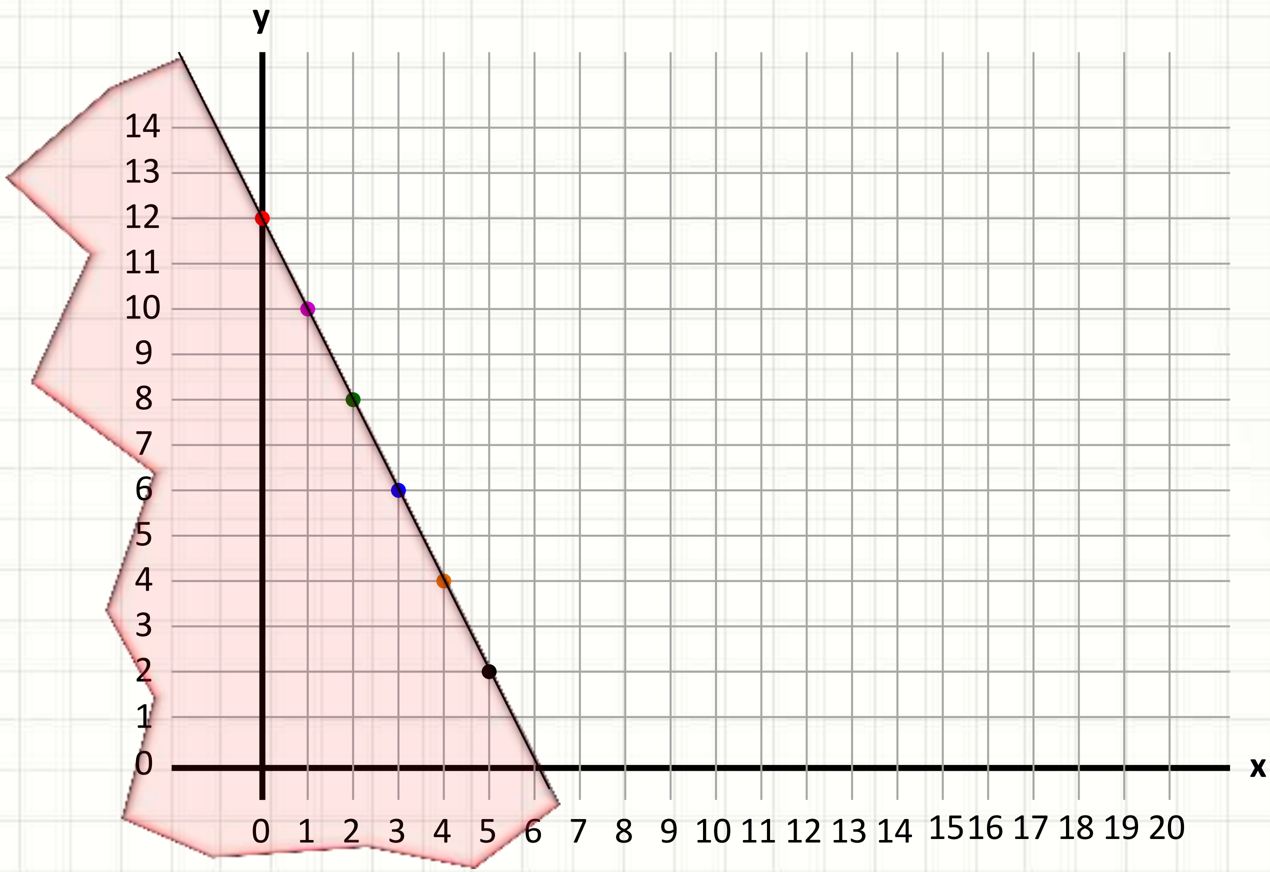
Reta: equação LINEAR

Gráficos de Inequações

X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

- Gráfico de: $4x + 2y \leq 24$

Chocolate custa R$4,00 e o Bombom Custa R$2,00... E quero gastar até R$ 24,00!

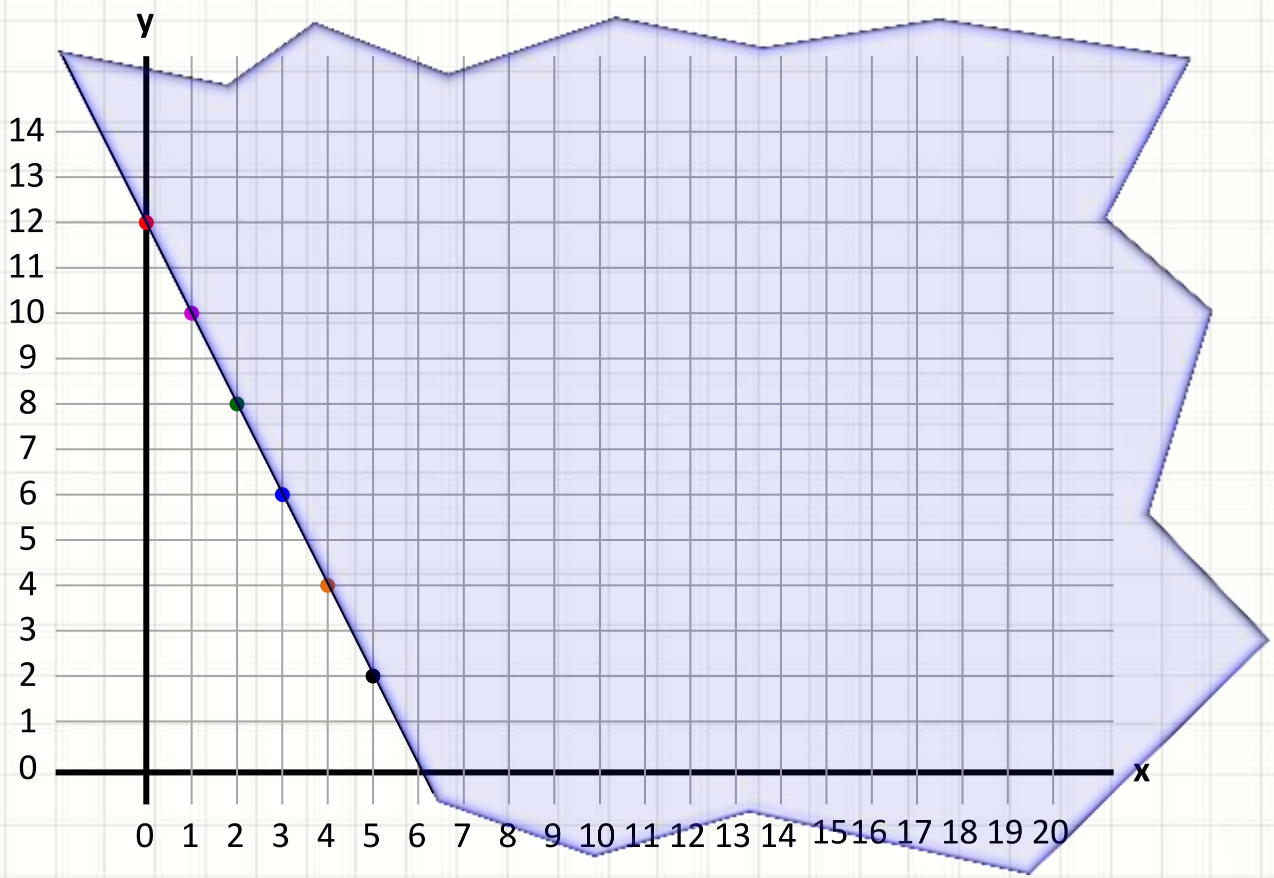


Gráficos de Inequações

- Gráfico de: $4x + 2y \geq 24$

Chocolate custa R$4,00 e o Bombom Custa R$2,00... E quero gastar acima de R$ 24,00!

X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

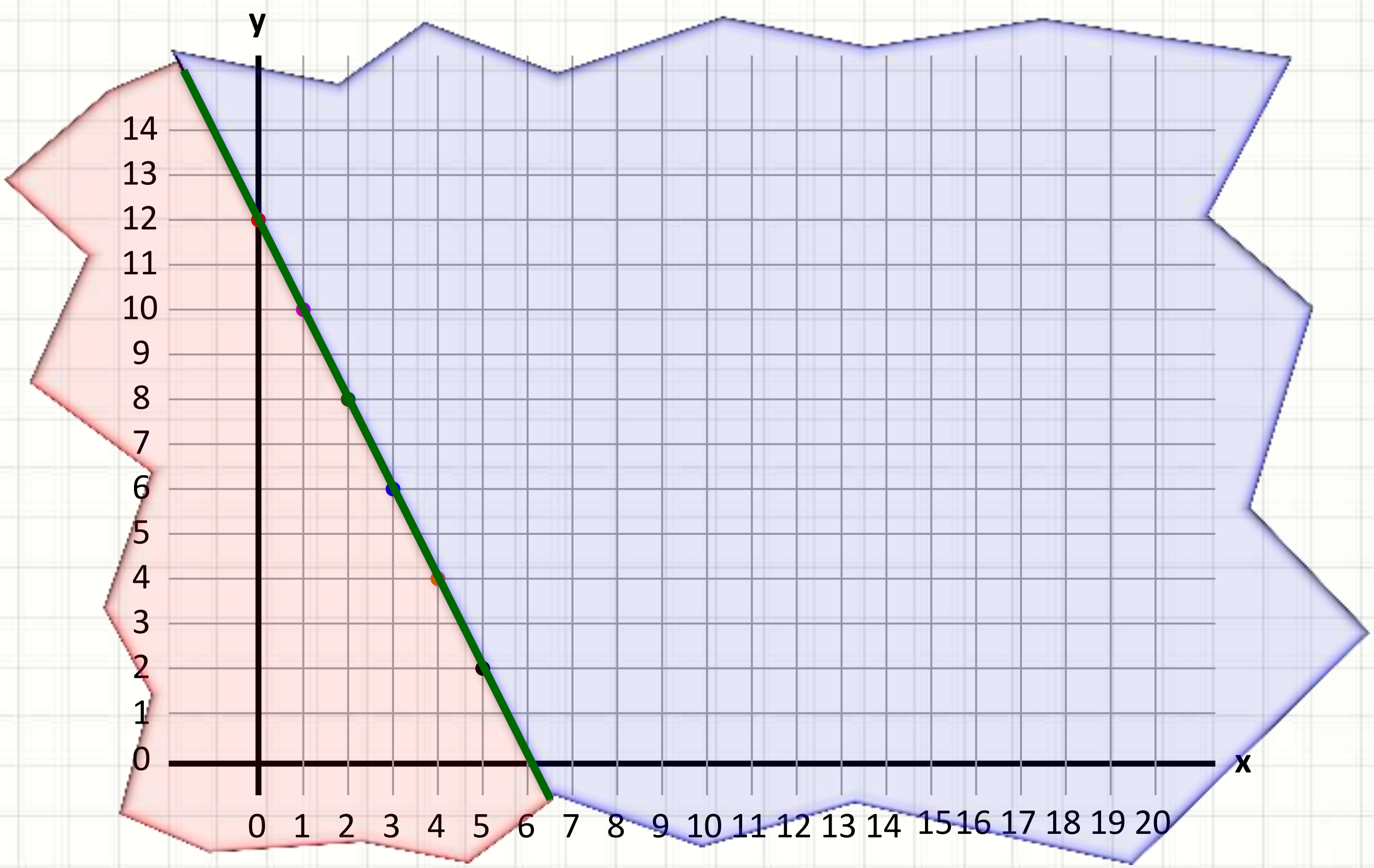


Gráficos de Inequações

X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

- Gráfico de:

$$4x + 2y \leq 24$$
$$4x + 2y = 24$$
$$4x + 2y \geq 24$$



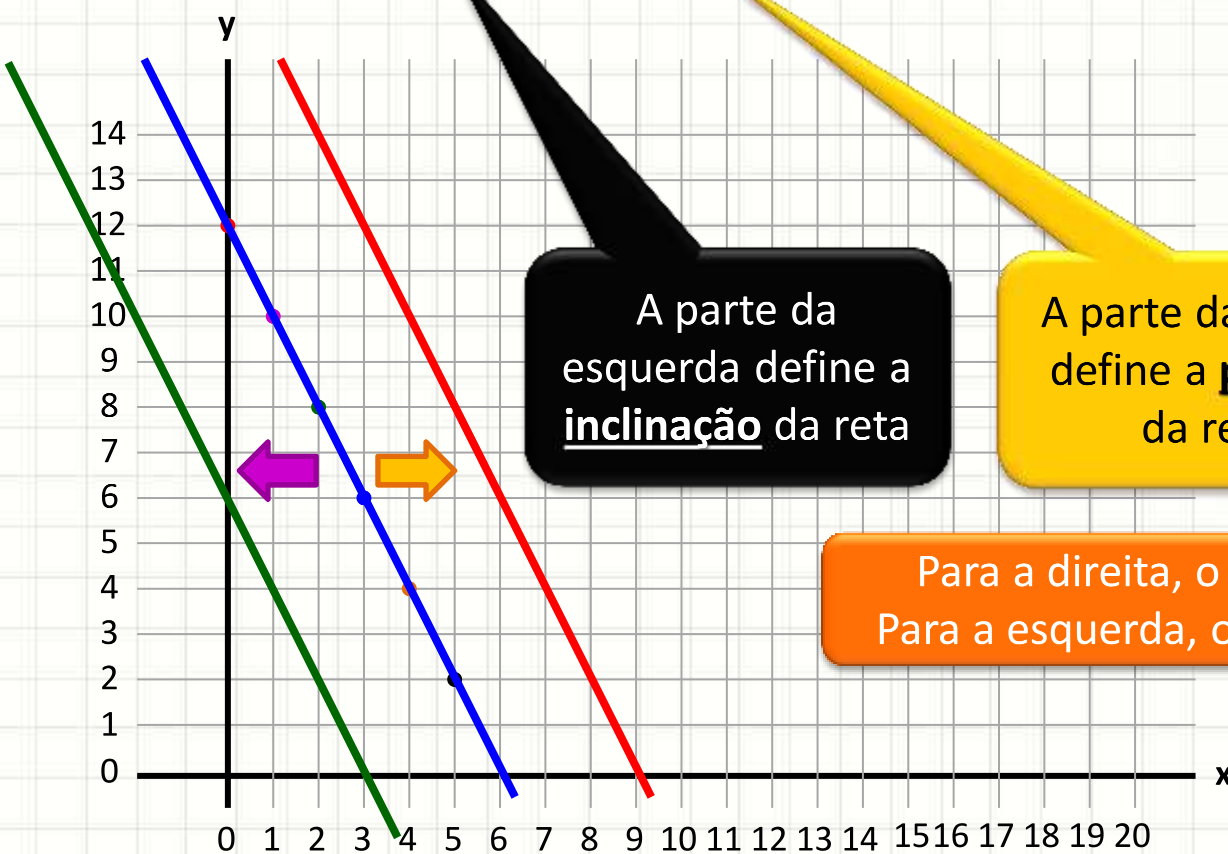
Gráficos de Funções

- Gráfico de: $4x + 2y = 12$
  $4x + 2y = 24$
  $4x + 2y = 36$

X	Y
0	6
1	4
2	2
3	0
4	-2
5	-4

X	Y
0	12
1	10
2	8
3	6
4	4
5	2

X	Y
0	18
1	16
2	14
3	12
4	10
5	8



A parte da esquerda define a **inclinação** da reta

A parte da direita define a **posição** da reta

Para a direita, o valor cresce;
Para a esquerda, o valor diminui!

Interpretação Gráfica de um Modelo de Programação Linear

Mix de Produção

- Uma fábrica produz dois produtos, A e B. Cada um deve ser processado por duas máquinas, M1 e M2. Devido à programação de outros produtos que também usam estas máquinas, estão disponíveis para os produtos A e B apenas **24 horas da máquina M1** e **16 horas da máquina M2**.
- Para **produzir uma unidade do produto A, são necessárias 4 horas em cada uma das máquinas** e para **produzir uma unidade do produto B, são necessárias 6 horas em M1 e 2 horas em M2**. Cada **unidade de A vendida gera um lucro de R$ 80,00** e cada **unidade de B vendida gera um lucro de R$ 60,00**.
- Existe uma previsão de **demanda máxima de 3 unidades para B**, mas nenhuma restrição de demanda para A. Deseja-se saber: **quanto produzir de cada produto para maximizar o lucro**?

Mix de Produção

- Disponibilidade de Máquina: **24h de M1** e **16h de M2**.
- Produção de unidade **A: 4h de M1** e **4h de M2**
- Produção de unidade **B: 6h de M1** e **2h de M2**.
- Lucro: **A: R$ 80,00** e **B: R$ 60,00**.
- Demanda máxima: **3 unidades de B**
- Objetivo: quanto de **A** e **B** para **maximizar o lucro**?

- Variáveis de decisão?
  - $\mathbf{x_A}$ – quantidade de A a produzir e $\mathbf{x_B}$ – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$
$$4.x_A + 2.x_B \leq 16$$
$$1.x_B \leq 3$$
$$1.x_A \geq 0$$
$$1.x_B \geq 0$$

Mix de Produção

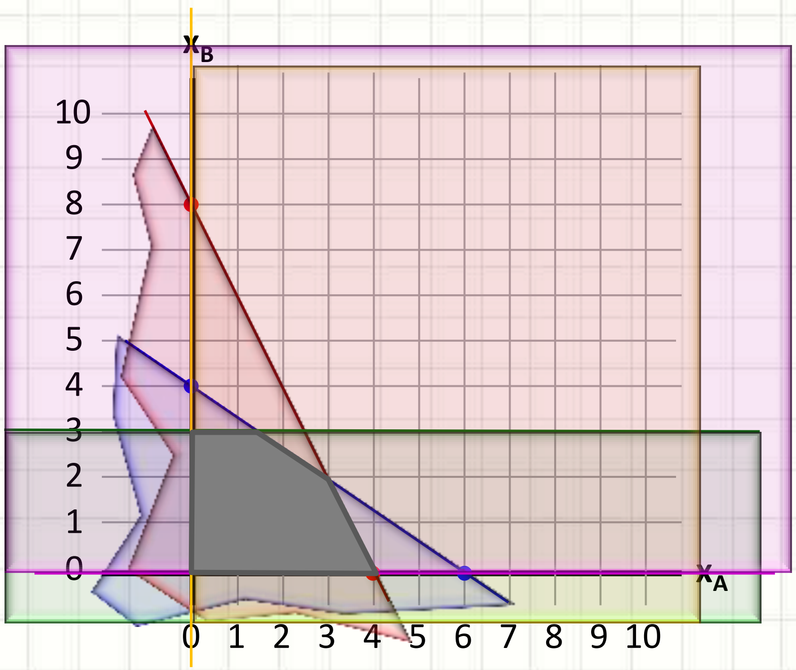
- Variáveis de decisão?
  - x_A – quantidade de A a produzir e x_B – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.: $4.x_A + 6.x_B \leq 24$ $1.x_A \geq 0$

  $4.x_A + 2.x_B \leq 16$ $1.x_B \geq 0$

  $1.x_B \leq 3$

x_A	x_B
0	4
6	0

x_A	x_B
0	8
4	0



Área de Soluções Viáveis

A solução estará em um dos extremos!

Ponto Extremo	x_A	x_B	Função Objetivo $80*x_A + 60*x_B$
1	0	0	0
2	4	0	320
3	3	2	360
4	1,5	3	300
5	0	3	180

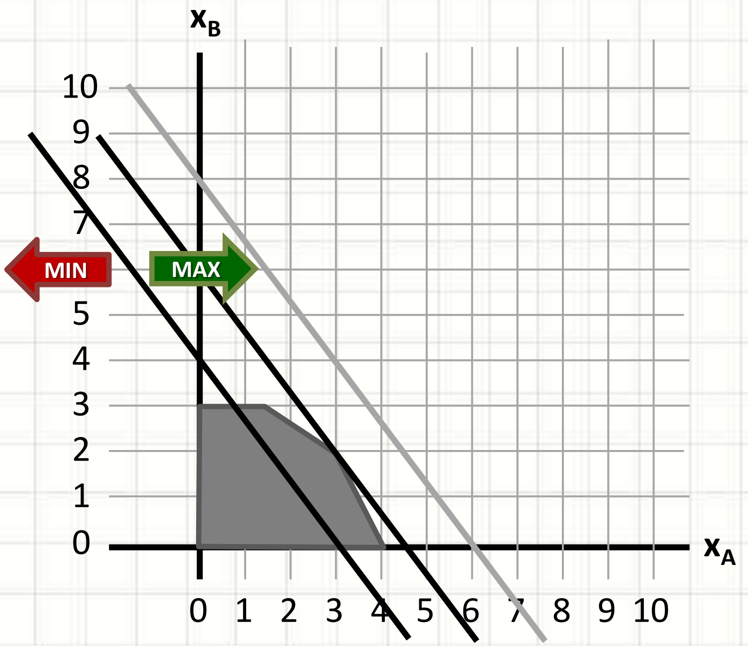
Mix de Produção –Forma Gráfica

- Variáveis de decisão?
  - x_A – quantidade de A a produzir e x_B – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24 \qquad 1.x_A \geq 0$$

$$4.x_A + 2.x_B \leq 16 \qquad 1.x_B \geq 0$$

$$1.x_B \leq 3$$



$$80.x_A + 60.x_B = 240$$

x_A	x_B
0	4
3	0

$$80.x_A + 60.x_B = 480$$

x_A	x_B
0	8
6	0

EXERCÍCIOS

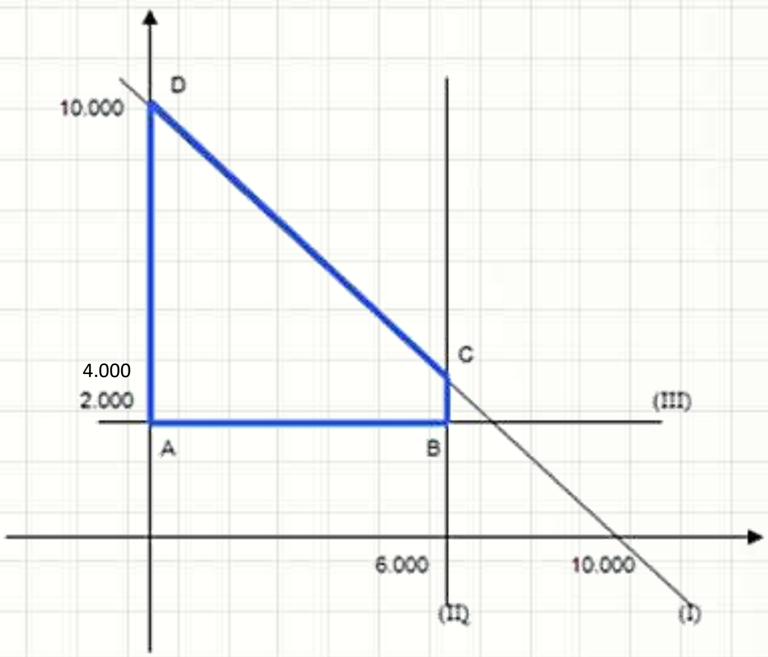
Investimentos

- Uma mulher tem R$ 10.000,00 para investir e seu corretor sugere dois títulos, A e B. O Título A é bastante arriscado, com lucro anual de 10%; o título B é seguro, mas com lucro anual de 7%.
- Depois de realizar várias considerações, a mulher resolve investir no máximo R$ 6.000,00 em A e no mínimo R$ 2.000,00 em B.
- Como ela deve investir seus R$ 10.000,00 de modo a maximizar o rendimento anual?

Investimentos

- Título A: lucro de 10%; Título B lucro de 7%.
- Máximo R$ 6.000,00 em A
- Mínimo R$ 2.000,00 em B
- Como investir R$ 10.000,00 para maximizar o rendimento?
- FO: $[max]\ 0{,}1.x_A + 0{,}07.x_B$
- SA:

$$
\begin{aligned}
1.x_A + 1.x_B &\leq 10000 \\
1.x_A \qquad\qquad &\leq 6000 \\
1.x_B &\geq 2000 \\
1.x_A &\geq 0 \\
1.x_B &\geq 0
\end{aligned}
$$



Seleção de Tarefas

- Um computador (1) tem um limite de 4TB (1TB = 1000GB) de memória e seu usuário pode executar até executar até 72 horas de processamento por semana. Todos os dados a serem processados nessas 72 horas devem ser carregados ao mesmo tempo. Isso significa que tudo tem que caber nos 4TB de memória. Um cliente lhe passou muitos pacotes de dados, de DOIS tipos diferentes:
  a) 15 pacotes que exigem 250 GB, 1 hora de processamento cada um, pagando R$ 100,00 por unidade processada.
  b) 13 pacotes que exigem 200 GB, 5 horas de processamento cada um, pagando R$ 500,00 por unidade processada.
- Deseja-se o modelo de programação linear para definir quais pacotes serão processados para que o maior lucro seja obtido.

Seleção de Tarefas

- Limite de memória e tempo: 4000GB, 72h
- Pacotes A: 15 de 250GB, 1h, R$ 100,00
- Pacotes B: 13 de 200GB, 5h, R$ 500,00
- Quantos de cada pacote para máximo lucro

F.O.: $[max]\ 100.x_A + 500.x_B$

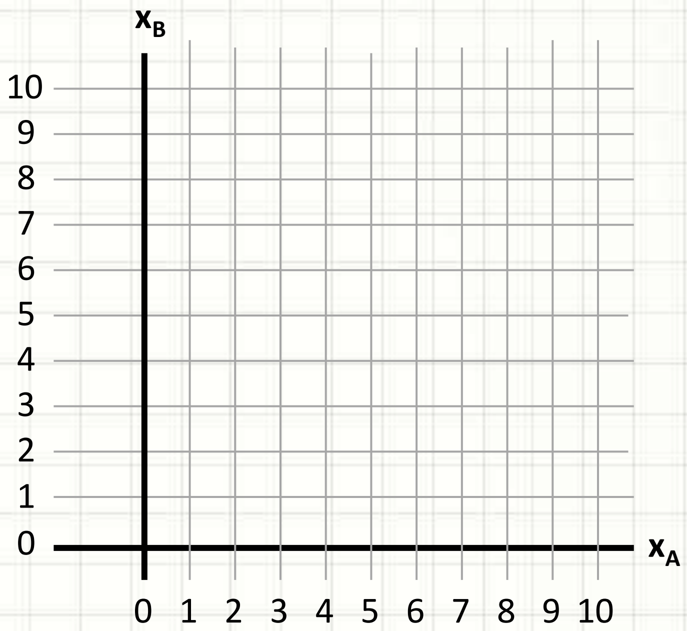
S.A.: $250.x_A + 200.x_B \leq 4000$

$1.x_A + 5.x_B \leq 72$

$1.x_A \leq 15$

$1.x_B \leq 13$

$x_A \geq 0;\ x_B \geq 0;$



Análises Possíveis

Lições que Tiramos dos Gráficos

- É possível uma solução para esse modelo?

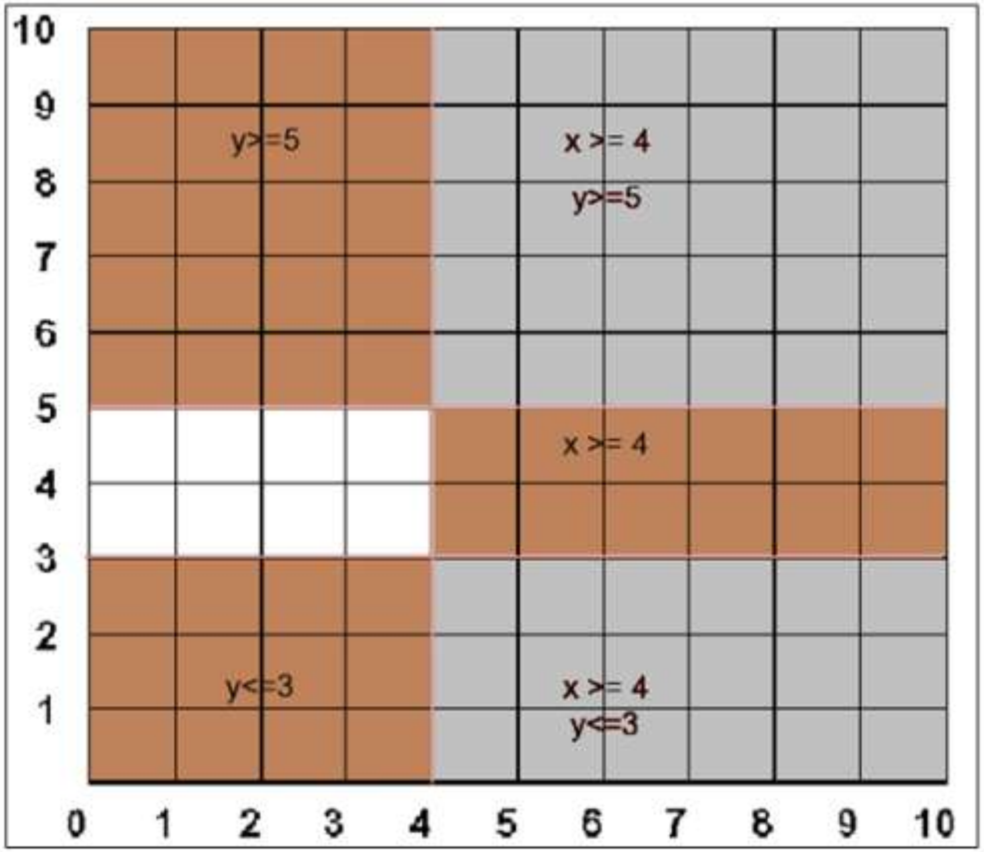
[MAX] 1*x + 2*y

Sujeito a: $x \geq 4$

$y \geq 5$

$y \leq 3$

Restrições Incompatíveis



Lições que Tiramos dos Gráficos

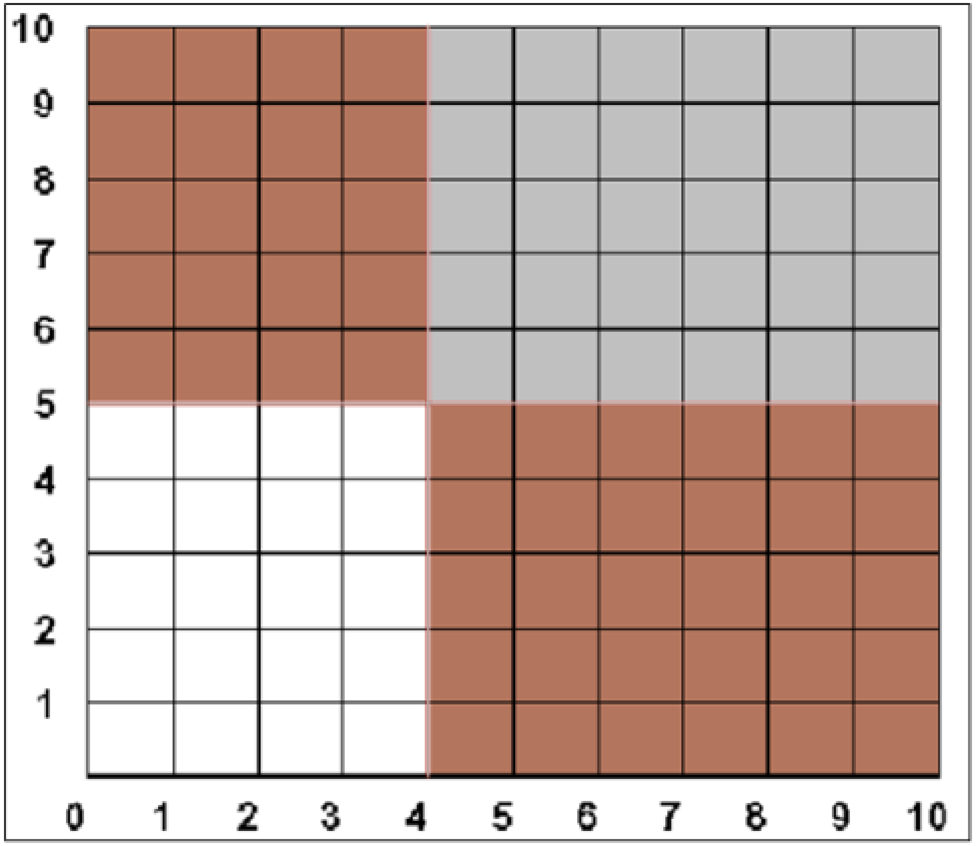
- É possível uma solução para esse modelo?

$$[MAX]\ 1*x + 2*y$$

Sujeito a:

$$x \geqslant 4$$
$$y \geqslant 5$$

Solução sem Fronteiras



Lições que Tiramos dos Gráficos

- Nesse caso: todas restrições são necessárias?

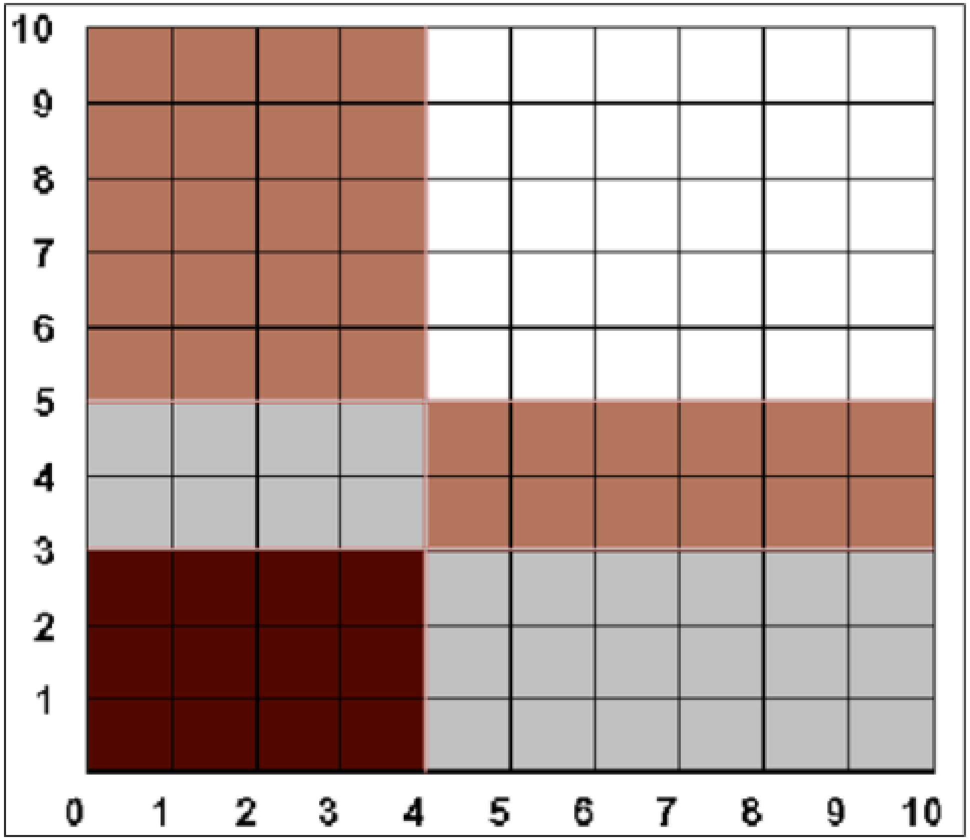
[MAX] $1*x + 2*y$

Sujeito a: $x \leq 4$

$y \leq 5$

$y \leq 3$

Restrições Redundantes



Lições que Tiramos dos Gráficos

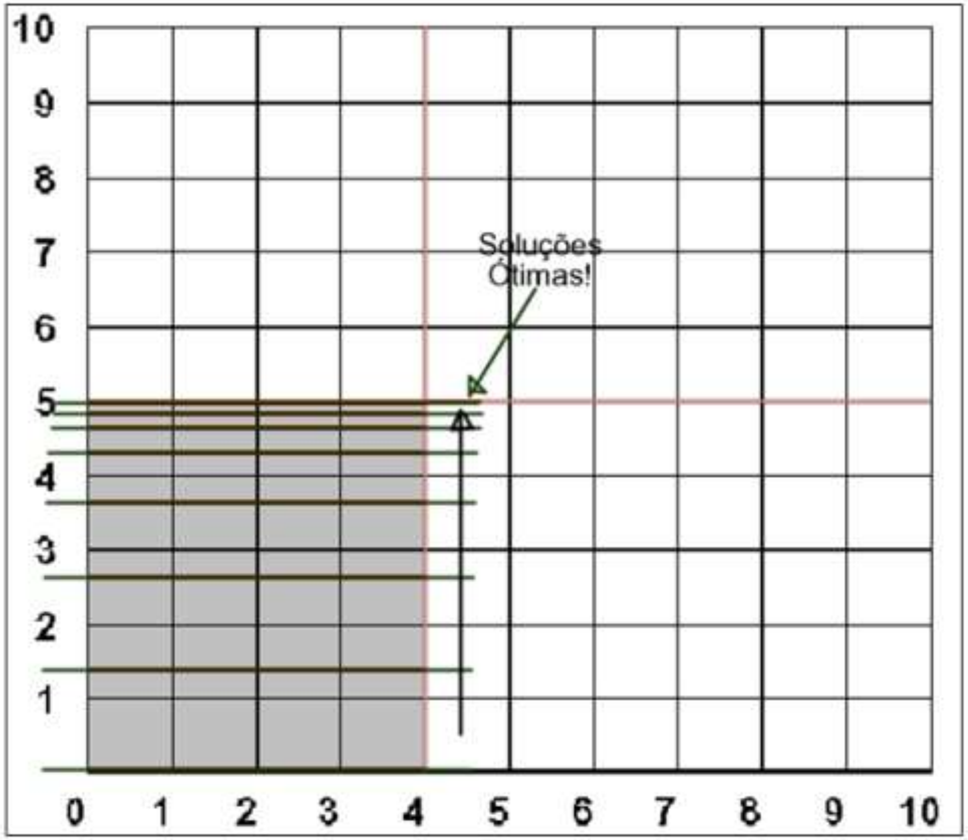
- Quantas soluções existem nesse caso?

$[MAX]\ 1*y$

Sujeito a: $x \leqslant 4$

$y \leqslant 5$

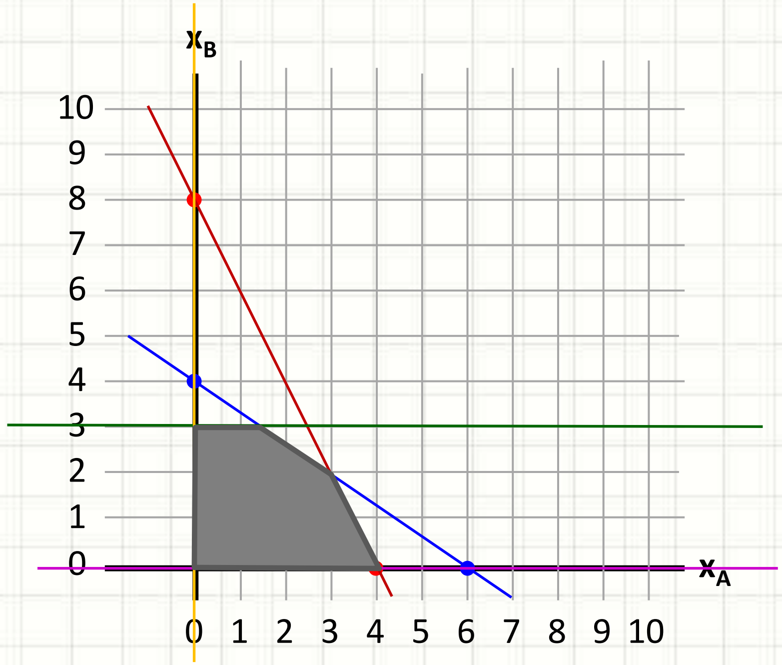
Soluções Alternativas



Teoremas Importantes

Teoremas

- Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



Teoremas

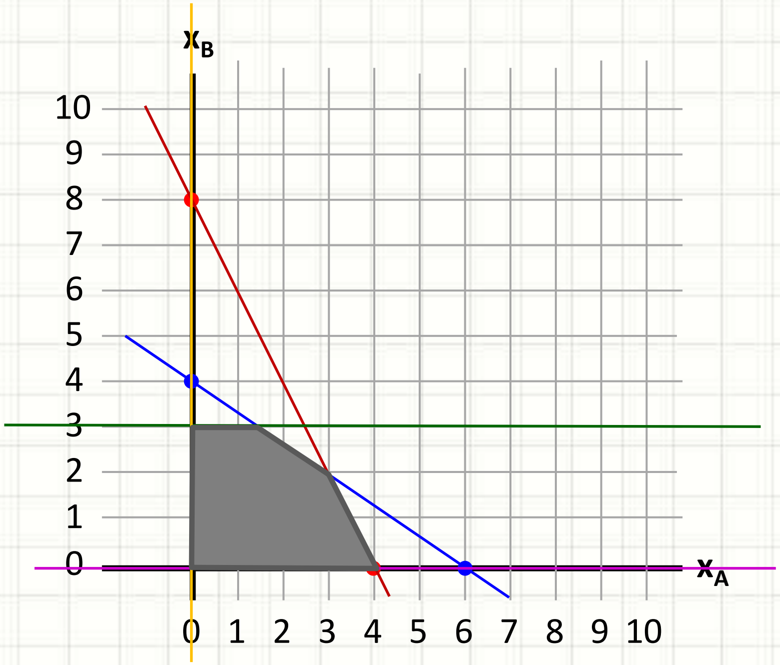
- Se a região de soluções viáveis de um problema de PL não é vazia, então existe uma solução ótima

Teoremas

- O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é um conjunto convexo

Teoremas

- O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL tem um número finito de pontos extremos.



Conclusões

Resumo

- Modelos Matemáticos: interpretação!
  - Visualização de restrições e função objetivo
  - É possível encontrar solução pelos gráficos
- É possível identificar
  - Restrições incompatíveis
  - Soluções sem fronteiras
  - Restrições redundantes
  - Múltiplas soluções
- Teoremas do Simplex
  - Preparando o modelo para o Simplex

Perguntas?

Exercício
Para Entrega

Dimensionamento de Frota

- Uma companhia de aluguel de caminhões possuía-os de dois tipos: o tipo A com 2 metros cúbicos de espaço refrigerado e 4 metros cúbicos de espaço não refrigerado e o tipo B com 3 metros cúbicos refrigerados e 3 não refrigerados.
- Uma fábrica precisou transportar 90 metros cúbicos de produto refrigerado e 120 metros cúbicos de produto não refrigerado. Quantos caminhões de cada tipo ela deve alugar, de modo a minimizar o custo, se o aluguel do caminhão A é R$ 3.000,00 e o do B é R$ 4.000,00.
- Determine a solução ótima do modelo... **[min]** !

Dimensionamento de Frota

F.O.: $[min]\ 3000.x_1 + 4000.x_2$

S.A.: $2.x_1 + 3.x_2 \geq 90$

$4.x_1 + 3.x_2 \geq 120$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$