Pesquisa Operacional I

Teoremas, Exercícios e A Forma Padrão

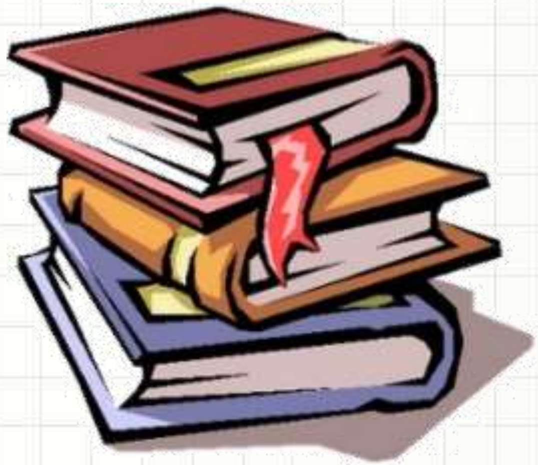
Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 2

Objetivos

- Compreender os principais teoremas relacionados ao Simplex.
- Aprimorar a competência em modelagem matemática

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Pesquisa Operacional I – Aula 4)
Biblioteca Virtual	• Iniciação à Pesquisa Operacional no Ambiente de Gestão, Cap. 2
Minha Biblioteca	• Pesquisa Operacional: Curso Introdutório, Cap. 2 • Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos, Cap. 3

O Processo da Pesquisa Operacional

Processo em 5 Etapas

1. Definição do Problema
   – O que se deseja atingir? Quais são as restrições?
2. Formulação do Modelo Quantitativo
   – Definir equações e inequações
3. Resolução do Modelo
   – Valores relevantes: **variáveis de decisão**
4. Validação e Consideração do Imponderável
   – Deve ser aplicável à realidade
5. Implementação da Solução
   – Transição suave

Retomando:

Interpretação Gráfica de um Modelo de Programação Linear

Mix de Produção

- Variáveis de decisão?
  - **x_A** – quantidade de A a produzir e **x_B** – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

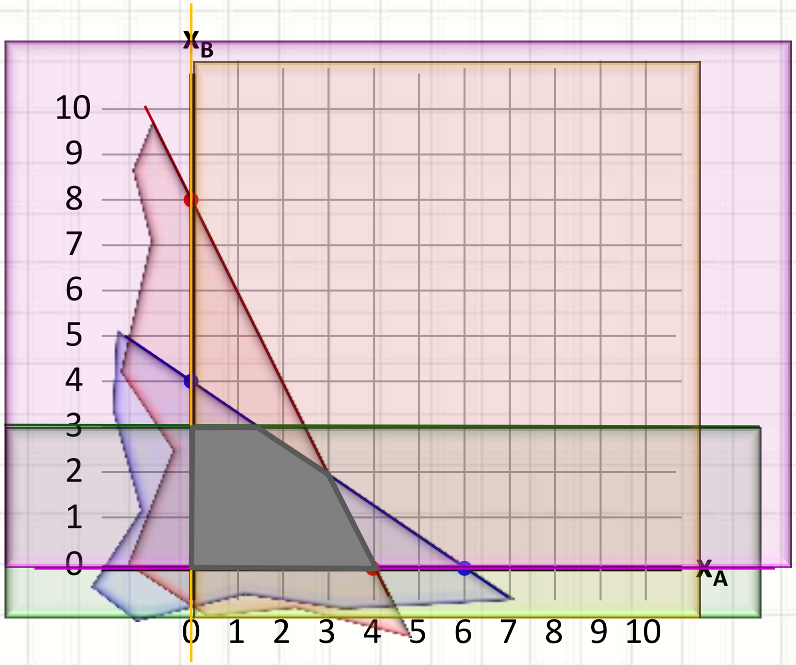
$4.x_A + 6.x_B \leq 24$ $\quad 1.x_A \geq 0$

$4.x_A + 2.x_B \leq 16$ $\quad 1.x_B \geq 0$

$1.x_B \leq 3$

x_A	x_B
0	4
6	0

x_A	x_B
0	8
4	0



Área de Soluções Viáveis

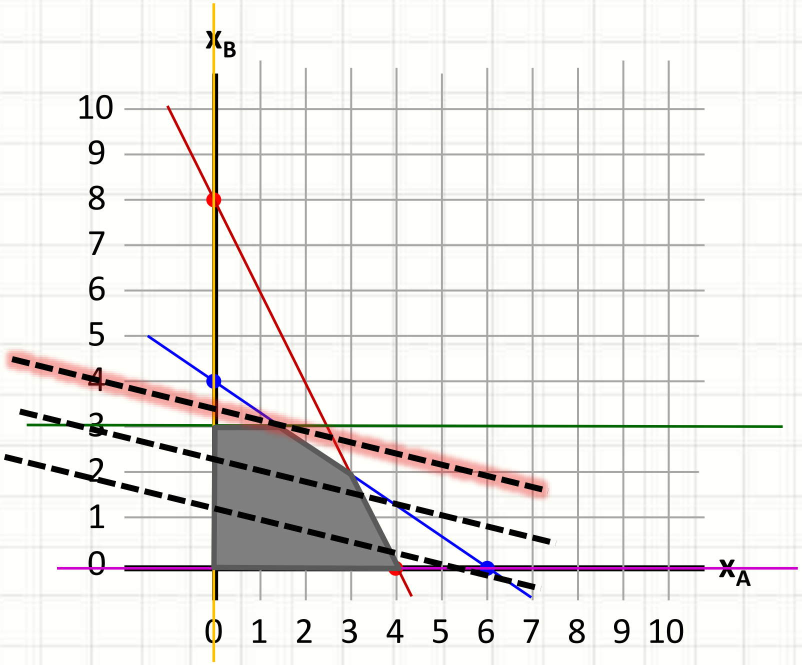
A solução estará em um dos extremos!

Ponto Extremo	x_A	x_B	Função Objetivo $80*x_A + 60*x_B$
1	0	0	0
2	4	0	320
3	3	2	360
4	1,5	3	300
5	0	3	180

Teoremas Importantes

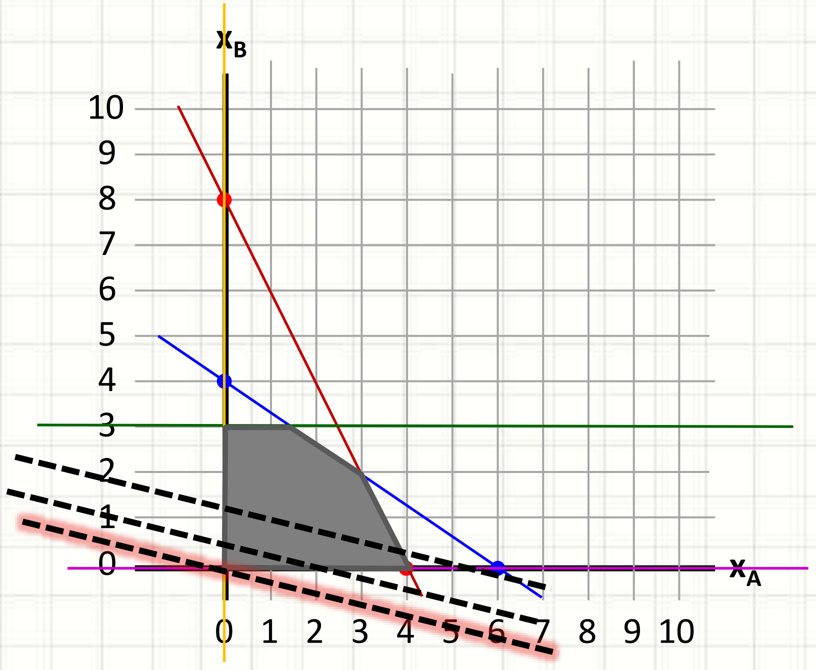
Teoremas

- **Teorema I**: Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



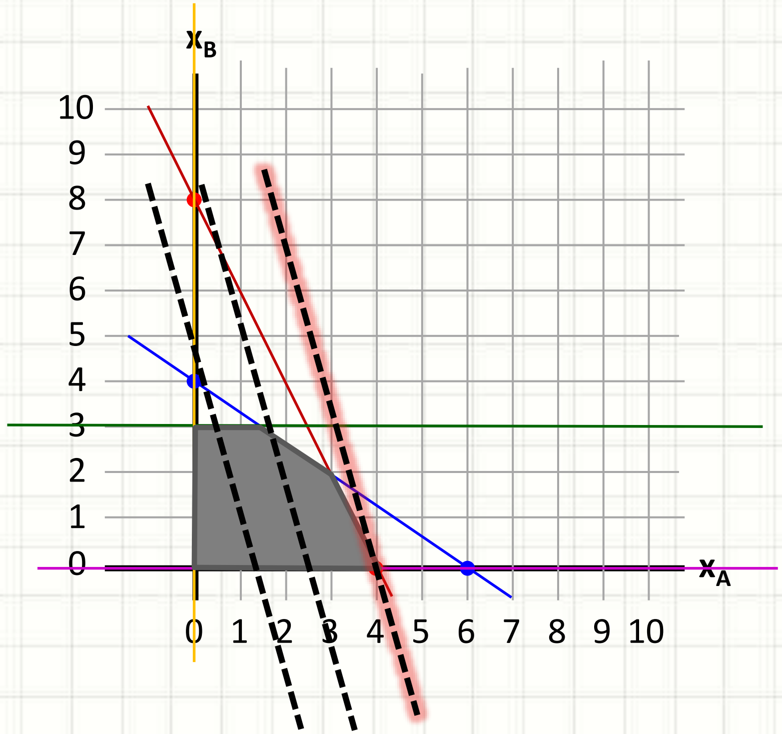
Teoremas

- **Teorema I**: Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



Teoremas

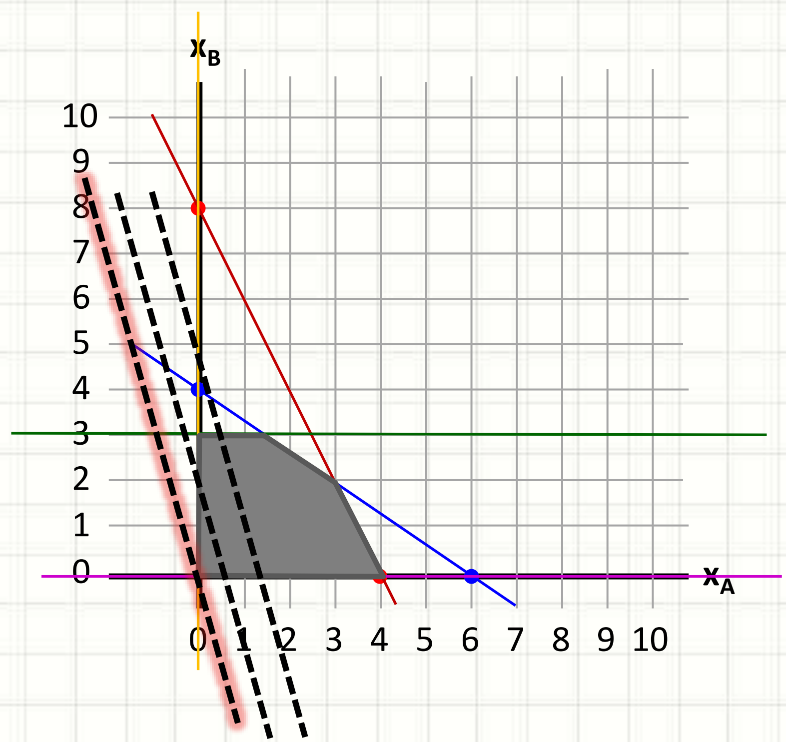
- **Teorema I**: Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



Max?

Teoremas

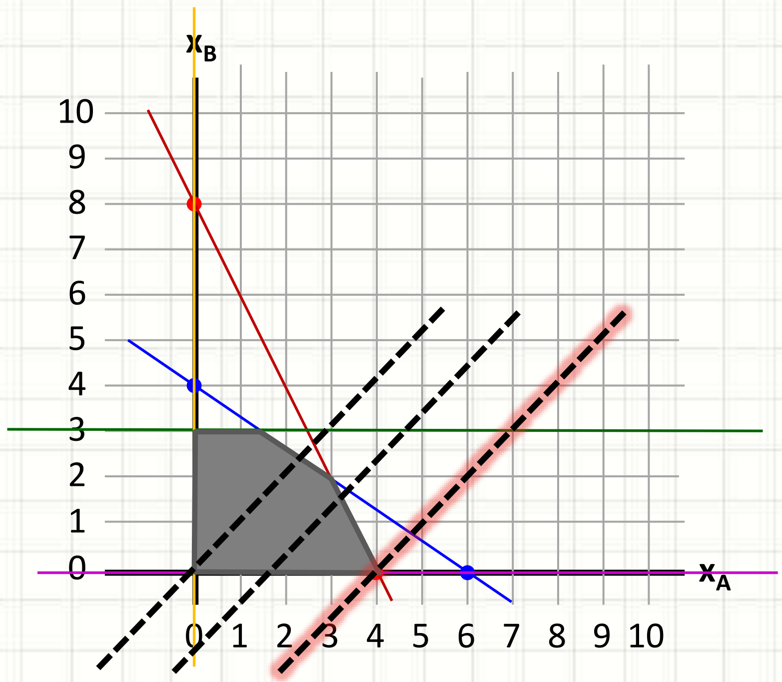
- **Teorema I**: Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



Min?

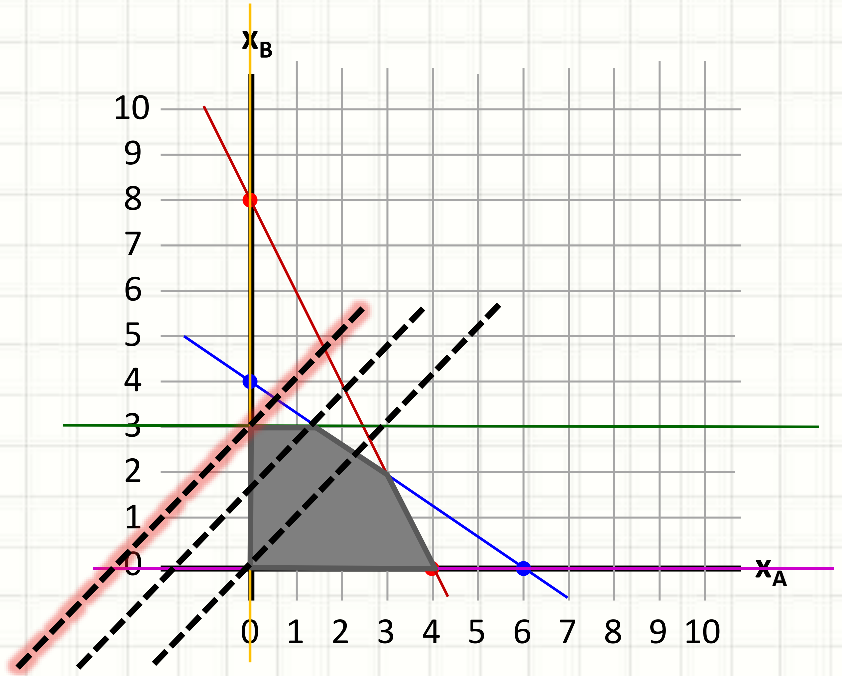
Teoremas

- **Teorema I**: Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



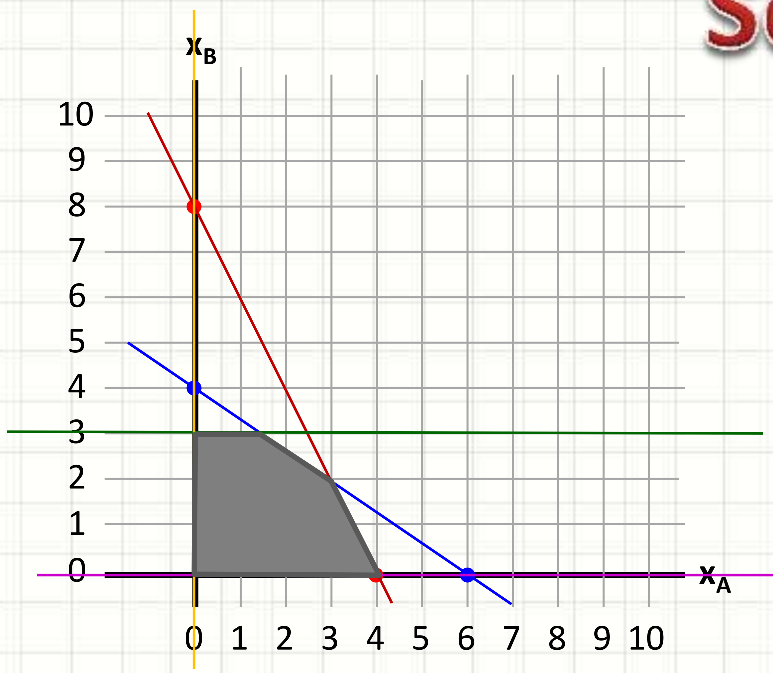
Teoremas

- **Teorema I**: Se o problema de PL tem solução ótima, ela esta em pelo menos um ponto extremo do polígono de soluções viáveis



Teoremas

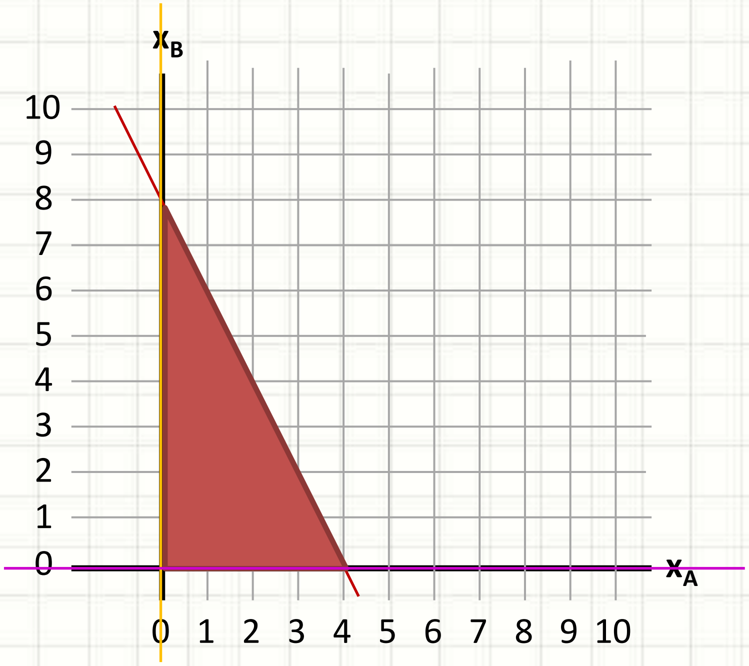
- **Teorema II**: Se a região de soluções viáveis de um problema de PL não é vazia, então existe uma solução ótima



Sempre há cantos!

Teoremas

- **Teorema III**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é um conjunto convexo



Conjunto Convexo

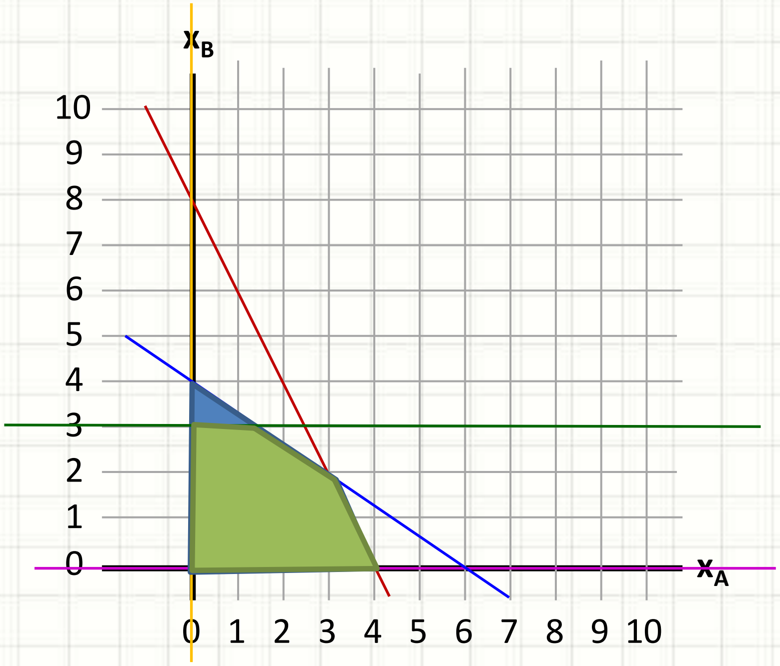
Teoremas

- **Teorema III**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é um conjunto convexo

Permanece Convexo!

Teoremas

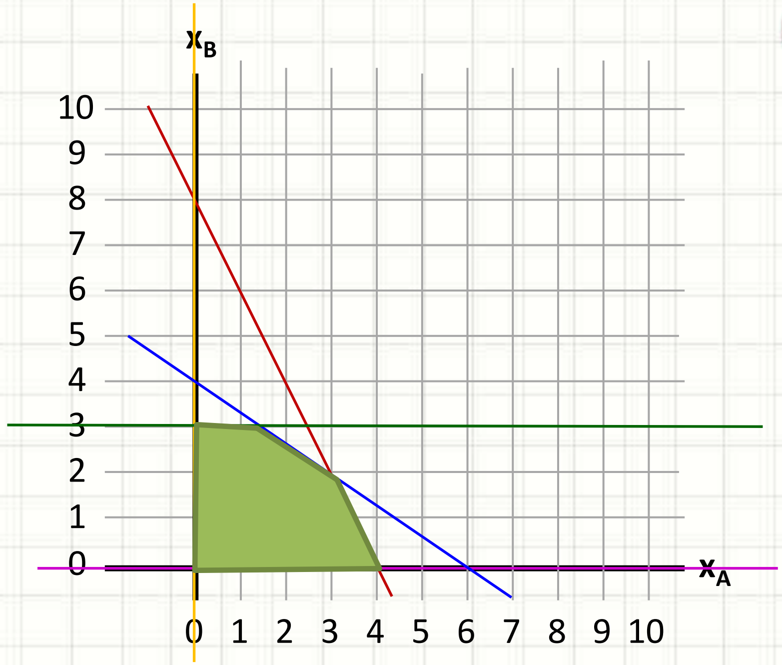
- **Teorema III**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é um conjunto convexo



Ainda é Convexo!

Teoremas

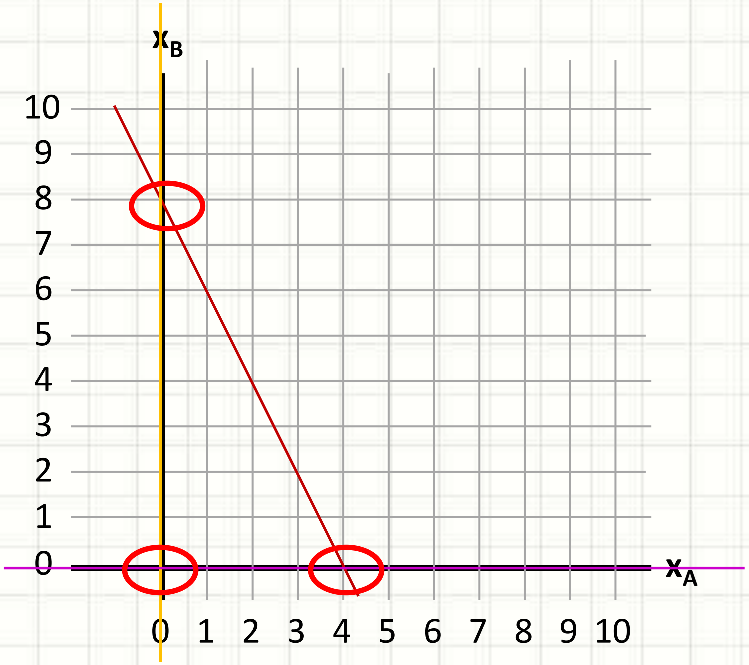
- **Teorema III**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL é um conjunto convexo



O corte por uma reta mantém o conjunto convexo!

Teoremas

- **Teorema IV**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL tem um número finito de pontos extremos.

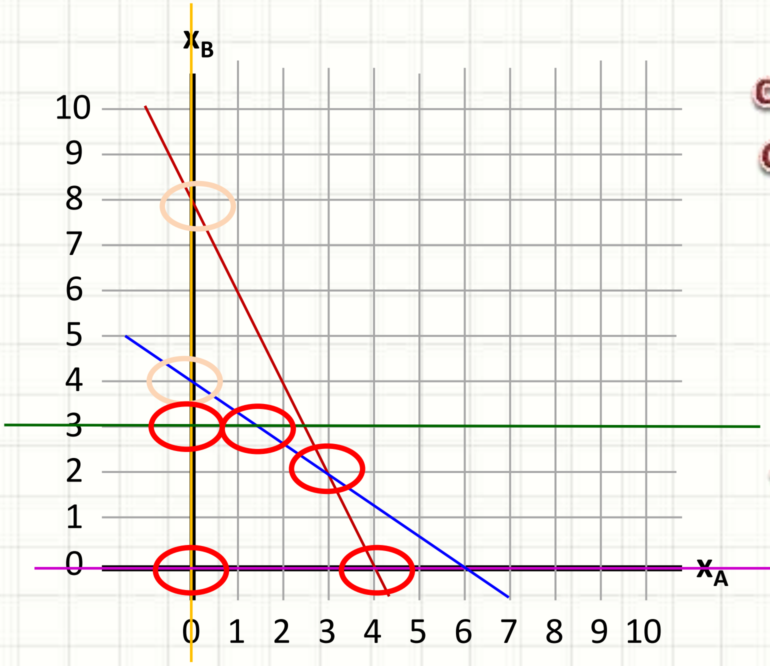


Teoremas

- **Teorema IV**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL tem um número finito de pontos extremos.

Teoremas

- **Teorema IV**: O conjunto de soluções viáveis de um problema de PL tem um número finito de pontos extremos.



Cada candidato a solução ótima é o cruzamento de retas que representam as restrições

As retas são as restrições em seu formato "equação"

PROBLEMAS

Problema I

- Em uma hora, um sapateiro é capaz de fazer 6 sapatos – se fizer só sapatos – ou 5 cintos por hora – se fizer apenas cintos.
- São gastas 2 unidades de couro para cada sapato, mas apenas 1 unidade de couro para cada cinto. Ele pode gastar até 6 unidades de couro por hora.
- O lucro para cada sapato é R$ 5,00 e para cada cinto é R$ 2,00.
- Faça o modelo para maximizar o lucro

Baseado em problema de Fernando Nogueira (fernando.nogueira@ufjf.edu.br)

Problema I

- 1 hora: 6 sapatos ou 5 cintos
- Sapato: 2 couros, lucro R$ 5,00
- Cinto: 1 couro, lucro R$ 2,00
- Disponibilidade: 6 couros por hora
- Faça o modelo para maximizar o lucro

- F.O.: $[max]\ 5.x_S + 2.x_C$
- S.A.: $10.x_S + 12.x_C \leq 60$

  $2.x_S + 1.x_C \leq 6$

  $1.x_S \geq 0$

  $1.x_C \geq 0$

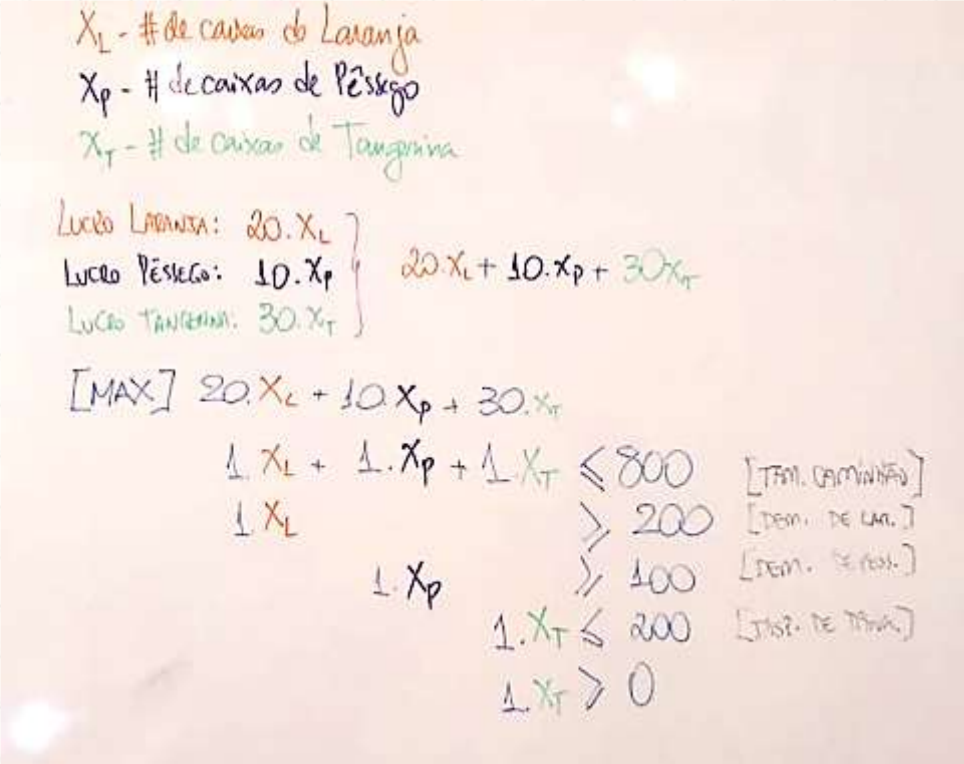
Problema II

- Um vendedor pode transportar 800 caixas por viagem. Considerando que ele precisa transportar pelo menos 200 caixas de laranja – lucro de R$20,00 por caixa –, pelo menos 100 caixas de pêssego – lucro de R$ 10,00 por caixa – e no máximo 200 caixas de tangerinas – a R$ 30,00 de lucro por caixa. Como ele deve carregar o caminhão para máximo lucro?

Baseado em problema de Fernando Nogueira (fernando.nogueira@ufjf.edu.br)

Problema II

- Capacidade: 800 caixas por viagem
- Laranja: pelo menos 200 caixas, lucro de R$20,00
- Pêssego: pelo menos 100 caixas, lucro de R$ 10,00
- Tangerina: no máximo 200 caixas, lucro de R$ 30,00
- Como carregar o caminhão para máximo lucro?

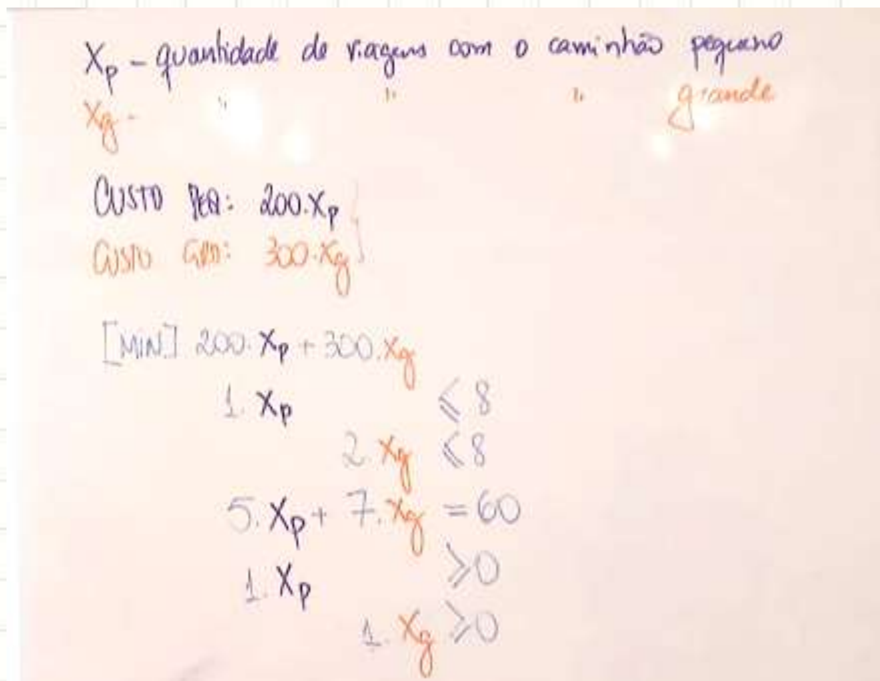


Problema III

- Uma transportadora tem dois caminhões. O pequeno tem capacidade para 5 toneladas e grande para 7 toneladas.
- Fazer uma entrega com o pequeno custa R$200,00; Já com o grande custa R$ 300,00.
- O caminhão pequeno faz uma entrega em 1 hora, e o de 7 toneladas faz entregas em 2 horas.
- É necessário entregar 60 toneladas em um dia, considerando 8 horas de trabalho dos motoristas.
- Quantas viagens realizar com cada caminhão para minimizar os custos totais?

Problema III

- 2 caminhões, Pequeno 5 t e Grande 7 t
- Pequeno: 1 hora, custo R$ 200,00
- Grande: 2 horas, custo R$300,00
- 8 Horas cada caminhão, 60 t a entregar
- # viagens de cada caminhão para min custos?



Problema IV

- Uma rede de televisão tem o seguinte problema: o programa “A”, com 20 minutos de música e 1 de propaganda, atinge 30.000 pessoas; o programa “B”, com 10 minutos de música e 1 de propaganda, chama a atenção de 10.000 pessoas.
- No decorrer de uma semana, o patrocinador quer no mínimo 5 minutos de sua propaganda, mas não há verba para mais que 80 minutos de música.
- Quantas vezes cada programa deve ir ao ar para obter o máximo número de espectadores?

Baseado em problema de Fernando Nogueira (fernando.nogueira@ufjf.edu.br)

Problema IV

- ProgA: música 20’, propaganda 1’, 30.000 pessoas
- ProgB: música 10’, propaganda 1’, 10.000 pessoas
- Exigência: min de 5’ prop; máx 80’ música
- # de vezes que c/ prog vai ao ar para max pessoas?

X_A - # de vezes que programa A vai ao ar na semana
X_B - # " " B " " "

Audiência A: $30.000 . X_A$
Audiência B: $10.000 . X_B$

Minutos música A: $20 . X_A$
Minutos música B: $10 . X_B$

[MAX] $30.000 . X_A + 10000 . X_B$

S.A.:
$$20 X_A + 10 . X_B \leq 80$$
$$1 . X_A + 1 . X_B \geq 5$$
$$1 . X_A \geq 0$$
$$1 . X_B \geq 0$$

Minutos Prop. A: $1 . X_A$
Minutos Prop B: $1 . X_B$

Introdução à Forma Padrão

Forma Padrão

- Variáveis de decisão
  - $\mathbf{x_A}$ – quantidade de A a produzir e $\mathbf{x_B}$ – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24 \qquad 1.x_A \geq 0$$

$$4.x_A + 2.x_B \leq 16 \qquad 1.x_B \geq 0$$

$$1.x_B \leq 3$$

- Método matemático: restrições → igualdades!
  - É possível?

Forma Padrão

- Vejamos uma das restrições

Horas da máquina usada para o produto B

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$

Total de Horas da Máquina

Horas da máquina usada para o produto A

Por que é "menor ou igual"?

Porque podem sobrar horas de máquina!

Forma Padrão

- Vejamos uma das restrições

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$

- Definindo x_s número de horas que sobram:

$$4.x_A + 6.x_B + 1.x_s = 24$$

Virou igualdade!

Mais sobre isso nas próximas aulas!

Conclusões

Resumo

- É possível compreender os teoremas!
- Praticar modelagem é fundamental!
- Conceito de Forma Padrão
  - Introdução!

- A lógica do Simplex
  - Colocando problemas na forma padrão

PERGUNTAS?