Pesquisa Operacional I

A Lógica do Simplex

Prof. Dr. Daniel Caetano

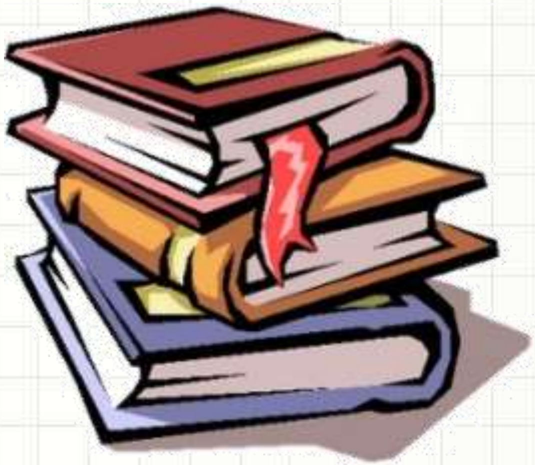
2019 - 2

Objetivos

- Compreender os principais teoremas relacionados ao Simplex.
- Aprimorar a competência em modelagem matemática

- **Atividade Aula 05 no SAVA!**

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação e Notas de Aula	http://www.caetano.eng.br/ (Pesquisa Operacional I – Aula 5)
Biblioteca Virtual	• Iniciação à Pesquisa Operacional no Ambiente de Gestão, Cap. 3
Minha Biblioteca	• Pesquisa Operacional: Curso Introdutório, Cap. 3

O Processo da Pesquisa Operacional

Processo em 5 Etapas

1. Definição do Problema
   – O que se deseja atingir? Quais são as restrições?
2. Formulação do Modelo Quantitativo
   – Definir equações e inequações
3. Resolução do Modelo
   – Valores relevantes: **variáveis de decisão**
4. Validação e Consideração do Imponderável
   – Deve ser aplicável à realidade
5. Implementação da Solução
   – Transição suave

Retomando:

Introdução à Forma Padrão

Forma Padrão

- Variáveis de decisão
  - $\mathbf{x_A}$ – quantidade de A a produzir e $\mathbf{x_B}$ – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24 \qquad 1.x_A \geq 0$$

$$4.x_A + 2.x_B \leq 16 \qquad 1.x_B \geq 0$$

$$1.x_B \leq 3$$

- Método matemático: restrições → igualdades!
  - É possível?

Forma Padrão

- Vejamos uma das restrições

Horas da máquina usada para o produto B

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$

Total de Horas da Máquina

Horas da máquina usada para o produto A

Por que é “menor ou igual”?

Porque podem sobrar horas de máquina!

Forma Padrão

- Vejamos uma das restrições

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$

- Definindo x_F número de horas de “Folga”

$$4.x_A + 6.x_B + 1.x_F = 24$$

Virou igualdade!

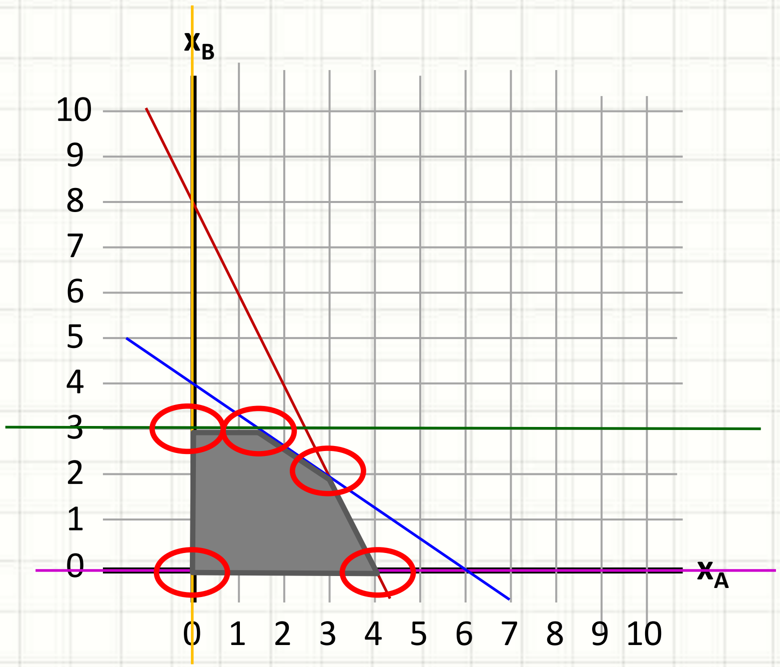
Por que isso é importante?

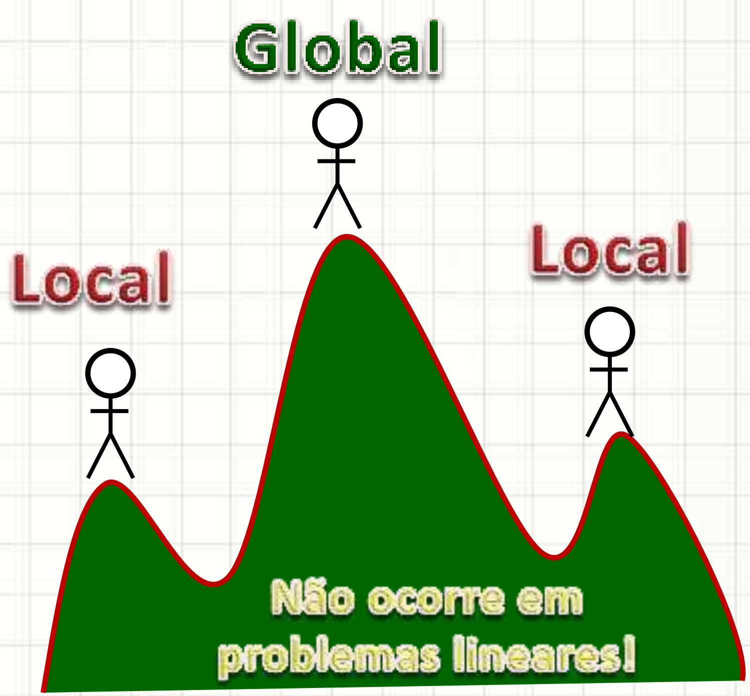
Noções do Método Simplex

Noções do Método Simplex

- Premissas:
  - Problema Linear
  - Espaço de soluções limitado
  - Logo: ao menos um dos vértices é ótimo global

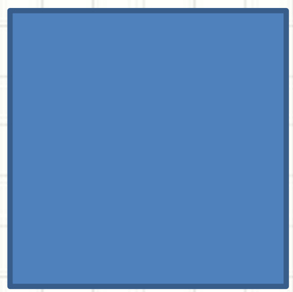
Como o Simplex usa isso?

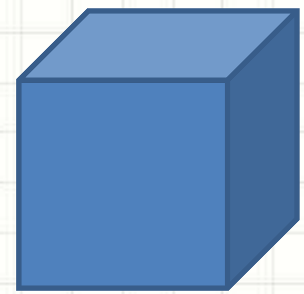


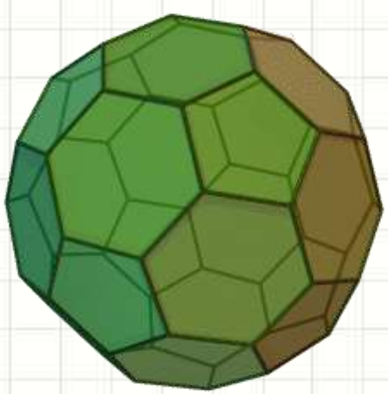


Lógica do Simplex

- Solução ótima está em um dos vértices...
- ...basta testar um por um... ?





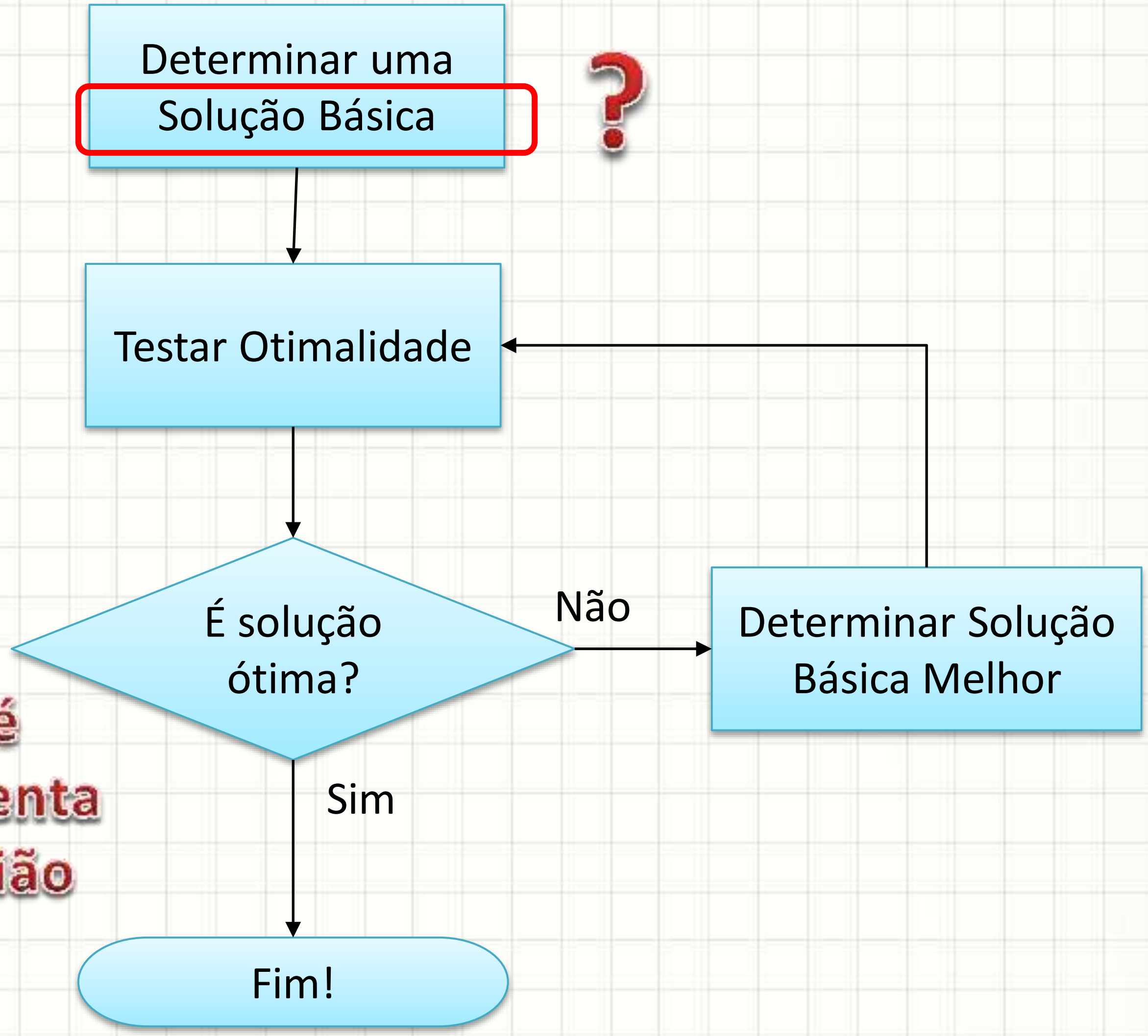


E isso porque ainda estamos no 3D!

Lógica do Simplex

- Calcular todos os vértices pode ser inviável!
- Sem percorrer todos...
  - Tem como saber se já achei o melhor?
- Ideia do Simplex
  - Determinar uma solução viável (primeiro vértice)
  - Se deslocar inteligentemente p/ próximo vértice
  - Parar quando se verifica que está no ótimo.

Algoritmo do Método Simplex



Solução Básica é aquela que representa um vértice da região viável

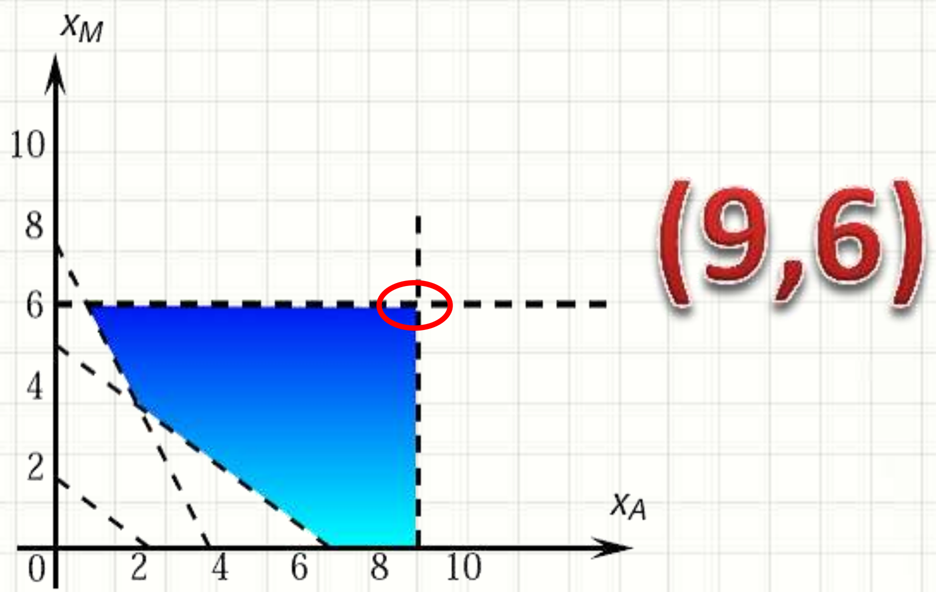
Passos do Método Simplex

Passos do Método Simplex

- Dois passos
  – Encontrar uma solução inicial
  – Encontrar solução básica melhor
- Há variações nesses métodos
  – Veremos o formato clássico

Passo I do Método Simplex

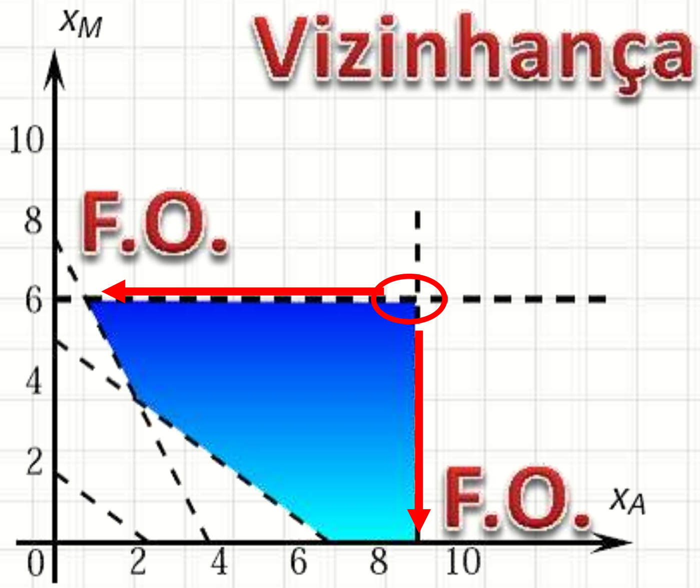
- Encontrar uma solução básica inicial
  - Em geral, simples para problemas “pequenos”

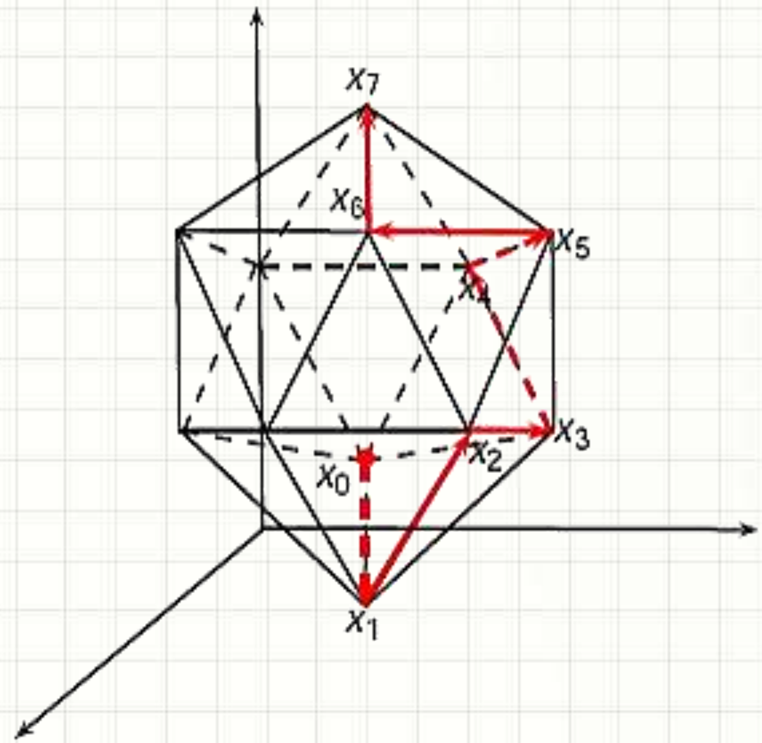


- Complexo com mais variáveis e restrições
  - Pode ocupar boa parte do tempo de solução

Passo II do Método Simplex

- A partir de um vértice, buscar maior melhoria





- Chego a um novo vértice... E aí?
  - Repito o procedimento!

Pontos Importantes

- Para começar...
  - Necessária uma solução básica viável
  - Esse cálculo pode ser computacionalmente pesado
- Número de vértices e complexidade de solução
  - Crescem com a dimensão (variáveis e restrições)
  - Crescimento pode ser exponencial!
- Na prática: raramente se verifica o crescimento exponencial
  - Viável: problemas envolvendo milhares de restrições!

Passo I do Simplex: A Solução Inicial

Encontrando a solução inicial

- Simplex pressupõe: soluções nos vértices
  - Transformar as restrições em igualdades

Forma Padrão

- Nos limitemos a restrições do tipo ≤

Forma Padrão

- Variáveis de decisão
  - **x_A** – quantidade de A a produzir e **x_B** – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80. x_A + 60. x_B$
- S.A.:

$$4. x_A + 6. x_B \leq 24$$
$$4. x_A + 2. x_B \leq 16$$
$$1. x_B \leq 3$$

- Forma padrão do modelo:
- F.O.: $[max]\ 80. x_A + 60. x_B$
- S.A.:

$$4. x_A + 6. x_B + 1. x_{f1} = 24$$
$$4. x_A + 2. x_B + 1. x_{f2} = 16$$
$$1. x_B + 1. x_{f3} = 3$$

Forma Padrão

- Variáveis de decisão
  - **x_A** – quantidade de A a produzir e **x_B** – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$
$$4.x_A + 2.x_B \leq 16$$
$$1.x_B \leq 3$$

- Forma padrão do modelo:
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B + 1.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3} = 24$$
$$4.x_A + 2.x_B + 0.x_{f1} + 1.x_{f2} + 0.x_{f3} = 16$$
$$0.x_A + 1.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 1.x_{f3} = 3$$

Forma Padrão

- Variáveis de decisão
  - **x_A** – quantidade de A a produzir e **x_B** – quantidade de B a produzir
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B \leq 24$$
$$4.x_A + 2.x_B \leq 16$$
$$1.x_B \leq 3$$

- Forma padrão do modelo:
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3}$
- S.A.:

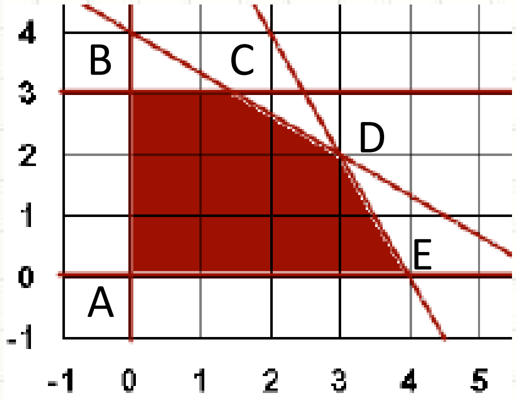
$$4.x_A + 6.x_B + 1.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3} = 24$$
$$4.x_A + 2.x_B + 0.x_{f1} + 1.x_{f2} + 0.x_{f3} = 16$$
$$0.x_A + 1.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 1.x_{f3} = 3$$

Encontrando a Solução Inicial

- Forma padrão do modelo:
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3}$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B + 1.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3} = 24$$
$$4.x_A + 2.x_B + 0.x_{f1} + 1.x_{f2} + 0.x_{f3} = 16$$
$$0.x_A + 1.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 1.x_{f3} = 3$$

- O sistema das restrições: 5 variáveis, 3 eqs.
  - Indeterminado: inúmeras soluções... Mas observe:



Ponto	X_A	X_B	X_{F1}	X_{F2}	X_{F3}
A	0	0	24	16	4
B	0	3	6	10	0
C	1,5	3	0	4	0
D	3	2	0	0	1
E	4	0	8	0	3

Encontrando a Solução Inicial

- Solução da forma padrão:
  - Solução Básica + Solução Não Básica
- Solução Básica
  - Tantas variáveis quantas forem as restrições
  - Valor usualmente maior que zero
- Solução Não Básica
  - Total de variáveis – número de restrições
  - Valor obrigatoriamente zero
- E isso facilita em quê, exatamente?

Encontrando a Solução Inicial

- Forma padrão do modelo:
- F.O.: $[max]\ 80.x_A + 60.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3}$
- S.A.:

$$4.x_A + 6.x_B + 1.x_{f1} + 0.x_{f2} + 0.x_{f3} = 24$$

$$4.x_A + 2.x_B + 0.x_{f1} + 1.x_{f2} + 0.x_{f3} = 16$$

$$0.x_A + 1.x_B + 0.x_{f1} + 0.x_{f2} + 1.x_{f3} = 3$$

- Variáveis de folga como básicas: x_{f1}, x_{f2}, x_{f3}
- Demais variáveis valem 0: $\boxed{x_A = 0 \text{ e } x_B = 0}$
- Calculando as equações das restrições:

$$\cancel{4.0} + \cancel{6.0} + 1.x_{f1} + \cancel{0.x_{f2}} + \cancel{0.x_{f3}} = 24 \implies x_{f1} = 24$$

$$\cancel{4.0} + \cancel{2.0} + \cancel{0.x_{f1}} + 1.x_{f2} + \cancel{0.x_{f3}} = 16 \implies x_{f2} = 16$$

$$\cancel{0.0} + \cancel{1.0} + \cancel{0.x_{f1}} + \cancel{0.x_{f2}} + 1.x_{f3} = 3 \implies x_{f3} = 3$$

Exemplo

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:
- F.O.: $[max]\ 3.x_1 + 5.x_2$
- S.A.: $1.x_1 \leq 4$

  $1.x_2 \leq 6$

  $3.x_1 + 2.x_2 \leq 18$

Exemplo

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:
- F.O.: $[max]\ 3.x_1 + 5.x_2$
- S.A.: $1.x_1 \leq 4$

  $1.x_2 \leq 6$

  $3.x_1 + 2.x_2 \leq 18$

$$
\begin{array}{llllll}
1.x_1 & & +1.x_{F1} & & & \leq 4 \\
& 1.x_2 & & +1.x_{F2} & & \leq 6 \\
3.x_1 & +2.x_2 & & & +1.x_{F3} & \leq 18
\end{array}
$$

Exemplo

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:
- F.O.: $[max]\, 3.x_1 + 5.x_2$
- S.A.: $1.x_1 \leq 4$

  $1.x_2 \leq 6$

  $3.x_1 + 2.x_2 \leq 18$

$$[max]\, 3.x_1 + 5.x_2 + 0.x_{F1} + 0.x_{F2} + 0.x_{F3}$$

$$1.x_1 + 0.x_2 + 1.x_{F1} + 0.x_{F2} + 0.x_{F3} \leq 4$$

$$0.x_1 + 1.x_2 + 0.x_{F1} + 1.x_{F2} + 0.x_{F3} \leq 6$$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 0.x_{F1} + 0.x_{F2} + 1.x_{F3} \leq 18$$

- Solução não básica: $x_1 = x_2 = 0$
- Solução básica: $x_{F1} = 4$, $x_{F2} = 6$, $x_{F3} = 18$

PROBLEMAS

Problema I

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:
- F.O.: $[max]\ 5.x_S + 2.x_C$
- S.A.: $10.x_S + 12.x_C \leq 60$

$2.x_S + 1.x_C \leq 6$

$1.x_S \geq 0$

$1.x_C \geq 0$

Problema II

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

X_L - # de caixas de Laranja

X_P - # de caixas de Pêssego

X_T - # de caixas de Tangerina

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Lucro Laranja:} & 20.X_L \\ \text{Lucro Pêssego:} & 10.X_P \\ \text{Lucro Tangerina:} & 30.X_T \end{array}\right\} \quad 20.X_L + 10.X_P + 30X_T$$

$$[\text{MAX}] \quad 20.X_L + 10.X_P + 30.X_T$$

$$\begin{array}{lll} 1.X_L + 1.X_P + 1.X_T & \leq 800 & [\text{TAM. CAMINHÃO}] \\ 1.X_L & \geq 200 & [\text{DEM. DE LAR.}] \\ 1.X_P & \geq 100 & [\text{DEM. DE PÊS.}] \\ 1.X_T & \leq 200 & [\text{DISP. DE TANG.}] \\ 1.X_T & \geq 0 & \end{array}$$

Problema III

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

X_p – quantidade de viagens com o caminhão pequeno

X_g – " " " grande

Custo PEQ: $200.X_p$

Custo GRD: $300.X_g$

$$[\text{MIN}]\ 200.X_p + 300.X_g$$

$$
\begin{aligned}
1.X_p & & \leq 8 \\
& 2.X_g & \leq 8 \\
5.X_p + & 7.X_g & = 60 \\
1.X_p & & \geq 0 \\
& 1.X_g & \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema IV

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

X_A - # de vezes que programa A vai ao ar na semana

X_B - # " " B " " "

AUDIÊNCIA A: $30.000 . X_A$

AUDIÊNCIA B: $10.000 . X_B$

MINUTOS MÚSICA A: $20 . X_A$

MINUTOS MÚSICA B: $10 . X_B$

[MAX] $30.000 . X_A + 10000 . X_B$

MINUTOS PROP. A: $1 . X_A$

MINUTOS PROP. B: $1 . X_B$

S.A.:

$$20 . X_A + 10 . X_B \leq 80$$

$$1 . X_A + 1 . X_B \geq 5$$

$$1 . X_A \geq 0$$

$$1 . X_B \geq 0$$

CONCLUSÕES

Resumo

- Características do problema linear...
  - Permitem chegar ao ótimo e identificá-lo
- O método Simplex usa essas características!
- Depende da forma padrão
  - Para o cálculo de uma solução inicial

- A tabela do Simplex
  - Uma forma organizada de resolver problemas!

Perguntas?