



PESQUISA OPERACIONAL I

ARTIFÍCIOS DE MODELAGEM

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 2

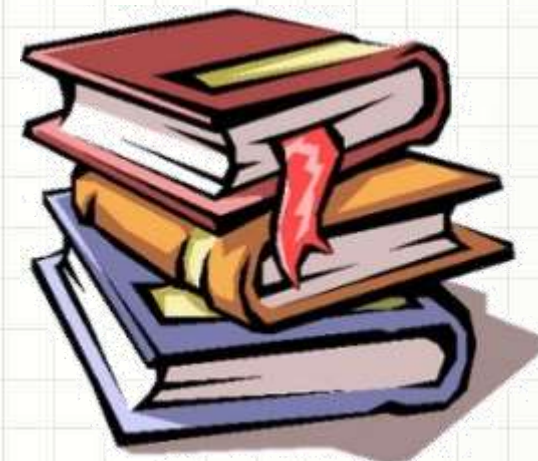
Objetivos

- Conhecer os principais artifícios de modelagem para aplicação do Simplex básico
- Compreender o uso de variáveis artificiais

- **Atividade Aula 07 no SAVVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação e
Notas de Aula

<http://www.caetano.eng.br/>
(Pesquisa Operacional I – Aula 7)

Biblioteca Virtual

- Pesquisa Operacional (Taha), Cap. 3

Minha Biblioteca

- Pesquisa Operacional: Curso Introdutório, Cap. 3



O PROCESSO DA PESQUISA OPERACIONAL

Processo em 5 Etapas

1. Definição do Problema

- O que se deseja atingir? Quais são as restrições?

2. Formulação do Modelo Quantitativo

- Definir equações e inequações

3. Resolução do Modelo


- Valores relevantes: **variáveis de decisão**

4. Validação e Consideração do Imponderável

- Deve ser aplicável à realidade

5. Implementação da Solução

- Transição suave



RETOMANDO:
NOÇÕES DO
MÉTODO SIMPLEX

Ideia do Simplex

- Procedimento
 1. Determinar uma solução viável (primeiro vértice)
 2. Se deslocar inteligentemente p / próximo vértice
 3. Parar quando se verifica que está no ótimo.
- Exigências do Método Visto
 - Todas as variáveis positivas
 - Lado direito positivo
 - Restrições “menor ou igual”
 - Problemas de maximização

**Como
superar?**



PROBLEMA I:
“LADO DIREITO” NEGATIVO

“Lado Direito” Negativo

- Observe a restrição abaixo:

$$1 \cdot x_A - 1 \cdot x_B \leq -7$$

- Qual o problema?

– Quando colocarmos uma variável de folga...

$$1 \cdot x_A - 1 \cdot x_B + 1 \cdot x_{f1} = -7$$

– Se x_A e x_B são não básicas e x_{f1} é básica...

$$1 \cdot x_{f1} = -7$$

– E o valor de uma variável não pode ser negativo!

“Lado Direito” Negativo

- Como resolver?

$$1 \cdot x_A - 1 \cdot x_B \leq -7$$

- Multiplicar a restrição por **-1**

$$-1 \cdot x_A + 1 \cdot x_B \geq 7$$

– Nas desigualdades, isso inverte a desigualdade!

- Mas isso nos leva a outro problema: \geq ?



**PROBLEMA II:
RESTRIÇÕES DO TIPO \geq**

Restrições do Tipo \geq

- Observe a restrição abaixo:

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B \geq 45$$

- Qual o problema?

– Quando convertemos para igualdade...

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B = 45$$

– A solução $x_A=4$ e $x_B=3$ deixa de valer!

$$4 \cdot 4 + 10 \cdot 3 \geq 45 \quad \checkmark$$

$$4 \cdot 4 + 10 \cdot 3 = 45 \quad \times$$

– Ou seja, essa mudança “muda” o problema!

Restrições do Tipo \geq

- Como resolver?

$$4.x_A + 10.x_B \geq 45$$

- Basta acrescentar uma variável de **excesso!**

$$4.x_A + 10.x_B = 45 + 1.x_{e1}$$

- Reordenando para o valor ficar só do lado direito...

$$4.x_A + 10.x_B - 1.x_{e1} = 45$$

- Quase lá... Mas e a solução inicial com $x_A = x_B = 0$?

$$-1.x_{e1} = 45 \quad \rightarrow \quad 1.x_{e1} = -45$$

- Ops... Não pode ser negativo! Como resolver?

Restrições do Tipo \geq

- Como resolver?

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B \geq 45$$

- Além do **excesso**, vamos inserir uma **artificial!**

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B - 1 \cdot x_{e1} + A_1 = 45$$

- E agora, na solução inicial, x_{e1} será não-básica!

$$+A_1 = 45$$

- O que significa essa variável artificial?
 - Nada! Ela só facilita encontrar uma solução inicial
 - E, na próxima aula, teremos de nos livrar dela!



**PROBLEMA III:
RESTRICÇÕES DO TIPO =**

Restrições do Tipo =

- Observe a restrição abaixo:

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B = 46$$

- Qual o problema?

– Não há mais solução com $x_A = x_B = 0$

$$4 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 46 \quad \mathbf{X}$$

– Ou seja, sem mudar, temos um problema!

Restrições do Tipo =

- Como resolver?

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B = 46$$

- Vamos inserir uma **artificial!**

$$4 \cdot x_A + 10 \cdot x_B + A_1 = 46$$

– E agora, na solução inicial:

$$+A_1 = 46$$

- Repetindo: o que significa a variável artificial?
 - Nada! Ela só facilita encontrar uma solução inicial
 - E, na próxima aula, teremos de nos livrar dela!



**PROBLEMA IV:
PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO**

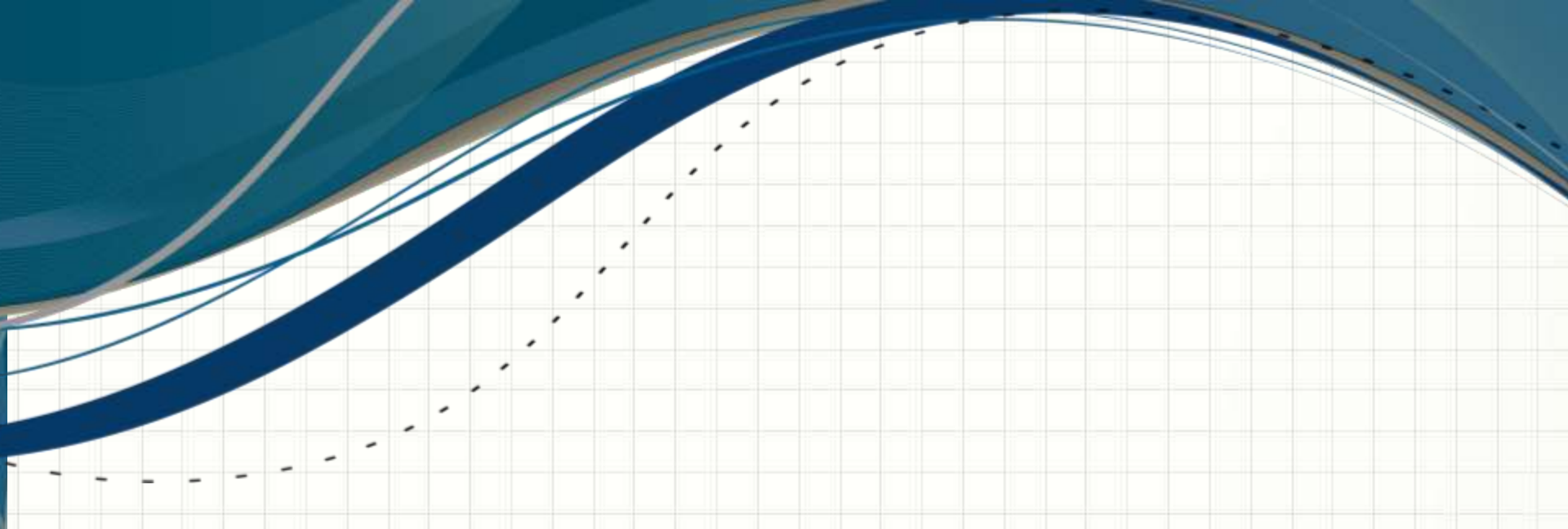
Problemas de Minimização

- O Simplex como visto: problemas de [MAX]
 - E o que fazemos em problemas do tipo [MIN]?



- Observe que o [MIN] é o inverso do [MAX]
 - Multiplicar a F.O. por -1!

$$[MIN] 4 \cdot x_A + 8 \cdot x_B \quad \rightarrow \quad [MAX] - 4 \cdot x_A - 8 \cdot x_B$$



AS NOVAS VARIÁVEIS NA FUNÇÃO OBJETIVO

Mudanças na F.O.

- Variáveis de folga
 - Aparecem com coeficiente 0 na F.O.
 - Porque não aumentam nem custo nem lucro
- Variáveis de excesso
 - Também aparecem com coeficiente 0 na F.O.
 - Pela mesma razão
- E as variáveis Artificiais?

Mudanças na F.O.

- Variáveis Artificiais?
 - Precisam **sair** da solução
 - Método do M grande: coeficiente alto a prejudicial
 - [MAX]? $-M.A_1$
 - [MIN]? $+M.A_1$
 - Duas fases
 - Fase 1: F.O. alternativa para eliminar A: [MIN] $1.A_1$
 - Fase 2: F.O. original a partir de solução da Fase 1

**Mais sobre isso na
próxima aula!**



EXEMPLO

Exemplo

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

- F.O.: $[min] 4.x_A + 6.x_T + 17.x_Z$

- S.A.: $1.x_A + 1.x_T - 5.x_Z \geq -20$

$$1.x_A + 1.x_T \geq 10$$

$$1.x_A + 1.x_Z = 11$$

$$1.x_T \leq 10$$

$$1.x_A \geq 0$$

$$1.x_T \geq 0$$

$$1.x_Z \geq 0$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \text{F.O.: [MAX]} \quad & -4x_A - 6x_T - 17x_z + 0x_{f1} + 0x_{e1} - M \cdot A_1 - M \cdot A_2 + 0x_{f2} \\ & -1x_A - 1x_T + 5x_z + 1x_{f1} + 0x_{e1} + 0A_1 + 0A_2 + 0x_{f2} = 20 \\ & 1x_A + 1x_T + 0x_z + 0x_{f1} - 1x_{e1} + 1A_1 + 0A_2 + 0x_{f2} = 10 \\ & 1x_A + 0x_T + 1x_z + 0x_{f1} + 0x_{e1} + 0A_1 + 1A_2 + 0x_{f2} = 11 \\ & 0x_A + 1x_T + 0x_z + 0x_{f1} + 0x_{e1} + 0A_1 + 0A_2 + 1x_{f2} = 10 \end{aligned}$$

$$x_A = x_T = x_z = 0$$

$$x_{e1} = 0$$

$$x_{f1} = 20$$

$$A_1 = 10$$

$$A_2 = 11$$

$$x_{f2} = 10$$



PROBLEMAS

Problema I

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

- F.O.: $[max] 20 \cdot x_L + 10 \cdot x_P + 30 \cdot x_T$

- S.A.: $1 \cdot x_L + 1 \cdot x_P + 1 \cdot x_T \leq 800$

$$1 \cdot x_L \geq 200$$

$$1 \cdot x_P \geq 100$$

$$1 \cdot x_T \leq 200$$

$$1 \cdot x_L \geq 0$$

$$1 \cdot x_P \geq 0$$

$$1 \cdot x_T \geq 0$$

Problema I

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

$$\begin{aligned} \text{F.O.: [MAX]} \quad & 20 \cdot x_L + 10 \cdot x_p + 30 \cdot x_T + 0x_{f1} + 0x_{f2} + 0x_{e1} + 0x_{e2} - M \cdot A_1 - M \cdot A_2 \\ & 1 \cdot x_L + 1 \cdot x_p + 1 \cdot x_T + 1x_{f1} + 0x_{f2} + 0x_{e1} + 0x_{e2} + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 = 800 \\ & 1 \cdot x_L + 0 \cdot x_p + 0 \cdot x_T + 0x_{f1} + 0x_{f2} - 1x_{e1} + 0x_{e2} + 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 = 200 \\ & 0 \cdot x_L + 1 \cdot x_p + 0 \cdot x_T + 0x_{f1} + 0x_{f2} + 0x_{e1} - 1x_{e2} + 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 = 100 \\ & 0 \cdot x_L + 0 \cdot x_p + 1 \cdot x_T + 0x_{f1} + 1x_{f2} + 0x_{e1} + 0x_{e2} + 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 = 200 \end{aligned}$$

$$x_L = x_p = x_T = x_{e1} = x_{e2} = 0$$

$$x_{f1} = 800$$

$$x_{f2} = 200$$

$$A_1 = 200$$

$$A_2 = 100$$

Problema II

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:
- F.O.: $[min] 200 \cdot x_P + 300 \cdot x_G$
- S.A.:
 - 1. $x_P \leq 8$
 - 2. $x_G \leq 8$
 - 5. $x_P + 7 \cdot x_G = 60$
 - 1. $x_P \geq 0$
 - 1. $x_G \geq 0$

Problema II

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

F.O.: [MAX] $-200x_p - 300x_g + 0x_{f_1} + 0x_{f_2} - M.A_1$

$$1x_p + 0x_g + 1x_{f_1} + 0x_{f_2} + 0A_1 = 8$$

$$0x_p + 2x_g + 0x_{f_1} + 1x_{f_2} + 0A_1 = 8$$

$$5x_p + 7x_g + 0x_{f_1} + 0x_{f_2} + 1A_1 = 60$$

$$x_p = x_g = 0$$

$$x_{f_1} = 8$$

$$x_{f_2} = 8$$

$$A_1 = 60$$

Problema III

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:
- F.O.: $[max] 30000 \cdot x_A + 10000 \cdot x_B$
- S.A.: $20 \cdot x_A + 10 \cdot x_B \leq 80$
 $1 \cdot x_A + 1 \cdot x_B \geq 5$
 $1 \cdot x_A \geq 0$
 $1 \cdot x_B \geq 0$

Problema III

- Coloque na forma padrão e encontre a solução inicial:

$$\text{F.O.: [MAX]} \quad 30.000 X_A + 10.000 X_B + 0 X_{f_1} + 0 X_{e_1} - M \cdot A_1$$

$$20 X_A + 10 X_B + 1 X_{f_1} + 0 X_{e_1} + 0 \cdot A_1 = 80$$

$$1 X_A + 1 X_B + 0 X_{f_1} - 1 X_{e_1} + 1 A_1 = 5$$

$$X_A = X_B = X_{e_1} = 0$$

$$X_{f_1} = 80$$

$$A_1 = 5$$



CONCLUSÕES

Resumo

- Método Simplex
 - Exige adaptações para alguns problemas
 - É possível “ajustar” qualquer problema de P.L.!
 - Ajusta-se o modelo...
 - Aplica-se o mesmo método!
-
- Como resolver esses problemas?
 - Aplicando os métodos!



PERGUNTAS?