



MECÂNICA DOS SÓLIDOS

MOMENTOS E O EQUILÍBRIO DOS CORPOS RÍGIDOS

Prof. Dr. Daniel Caetano

2019 - 2

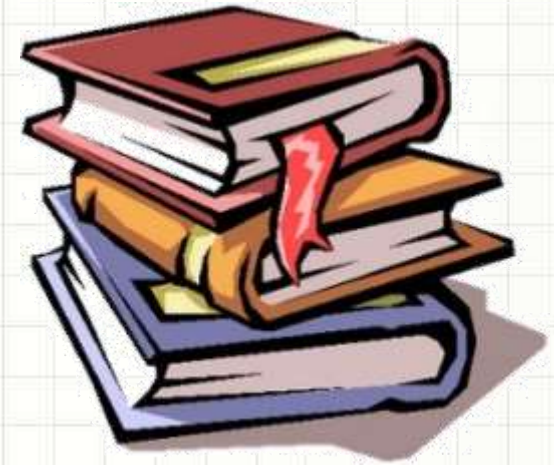
Objetivos

- Conceituar Momento de uma Força
- Habilitar para o cálculo de momentos
- Conhecer os graus de liberdade de um corpo
- Compreender as condições de equilíbrio de corpo rígido

- **Atividade Aula 2 – SAVA!**



Material de Estudo



Material

Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>
(Mecânica dos Sólidos – Aula 2)

Material Didático


Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 2 (SAVA)

Biblioteca Virtual

Estática e Mecânica dos Materiais (BEER;JOHNSTON),
Cap. 4

Material Adicional

Estática (HIBBELER), Cap 5.



RELEMBRANDO:

EQUILÍBRIO DE

FORÇAS E MOMENTOS

Equilíbrio de Forças

- Sempre que a resultante em uma direção é 0
 - Existe um equilíbrio de forças naquela direção

Condição de
Equilíbrio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$



Se equilibram!

- Equilíbrio significa “parado”?
 - “Sem alterar estado de movimento” na direção!

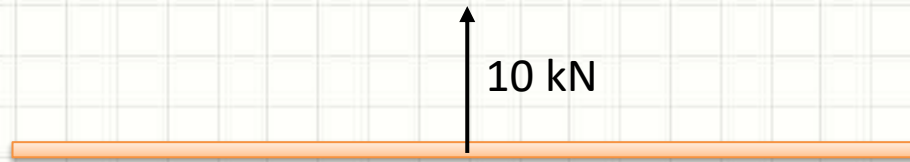


MOTIVAÇÃO:

EQUILÍBRIO EM BARRAS

Equilíbrio em Barras

- O que acontece com essa barra? $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$



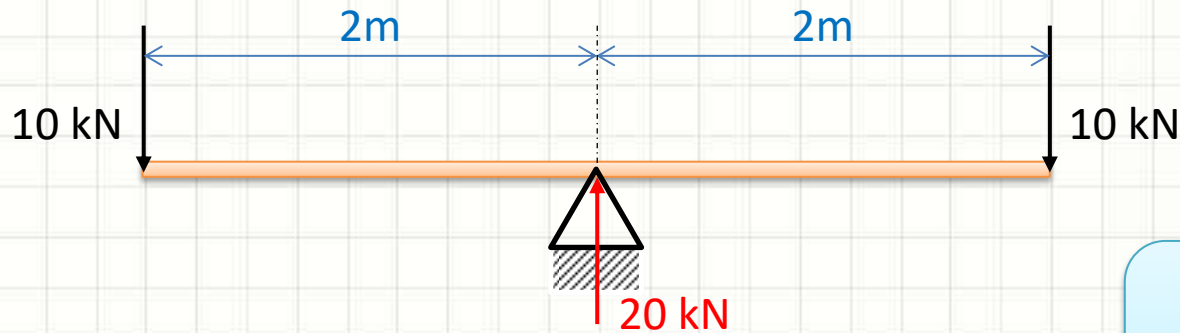
- E se ela estiver presa em uma articulação?



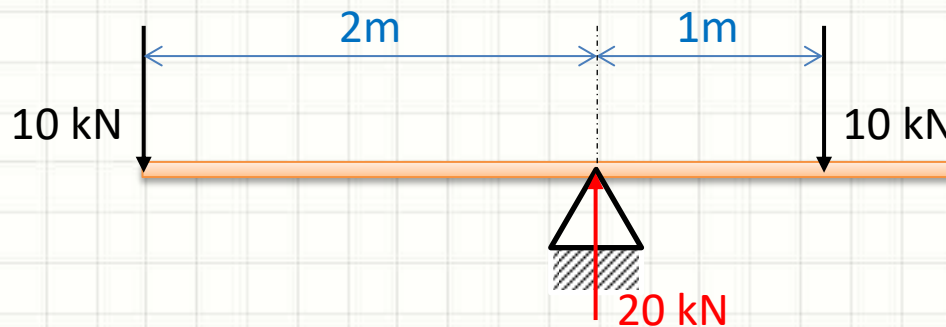
Está em equilíbrio?

Equilíbrio em Barras

- E nesse outro caso?



- E agora?



Condição de Equilíbrio

$$\vec{R}_X = \sum \vec{F}_X = 0$$

$$\vec{R}_Y = \sum \vec{F}_Y = 0$$

Parece que, para barras*, as condições que vimos não são suficientes!



MOMENTO DE UMA FORÇA

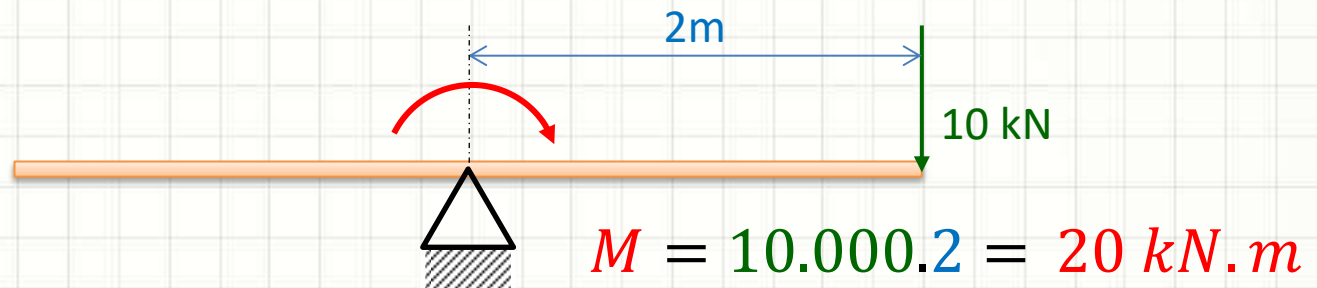
Momento de uma Força

- O **momento de uma força** em relação a um ponto nos dá a medida com que aquela força provoca uma **rotação ao redor do ponto**
- O momento é proporcional à:

– Força

$$M = F \cdot d$$

– Distância da linha de ação da força ao ponto

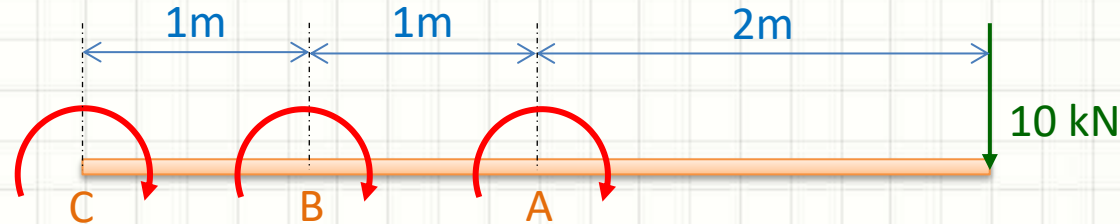


- A unidade do *momento* é **N.m**

Momento de uma Força

- O momento varia de acordo com o ponto!

$$M = F \cdot d$$



$$M_A = 10.000 \cdot 2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 10.000 \cdot (2 + 1) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = 10.000 \cdot (2 + 1 + 1) = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Momento de uma Força

- A distância **d** deve ser sempre medida *perpendicularmente* à força $M = F \cdot d$



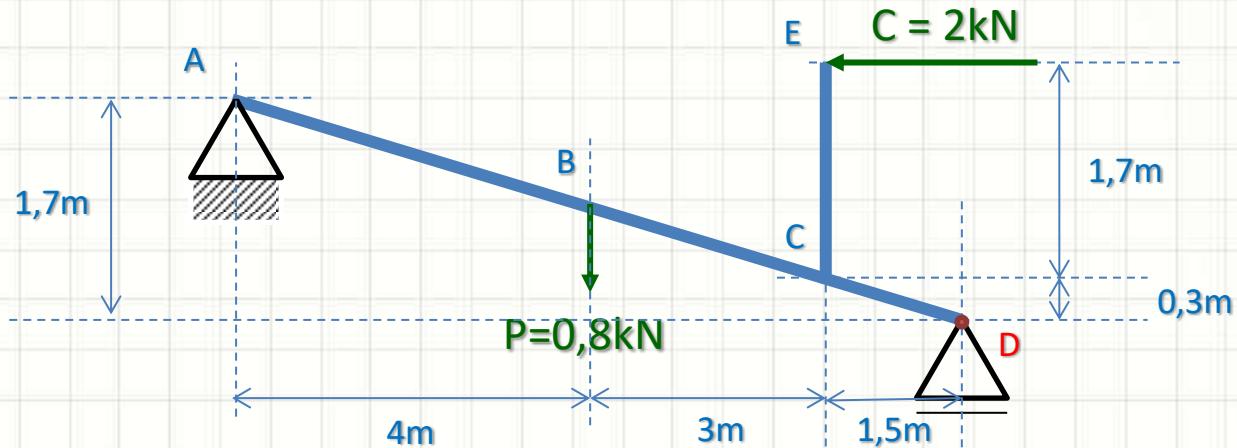
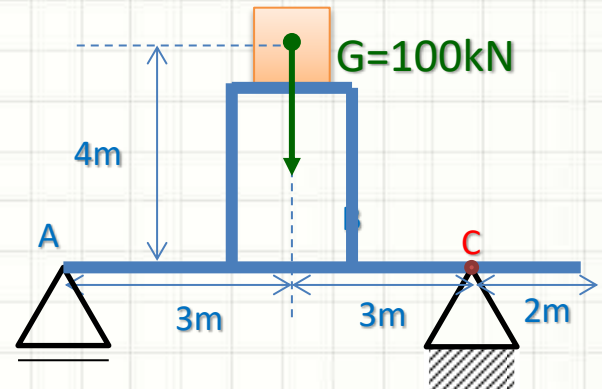
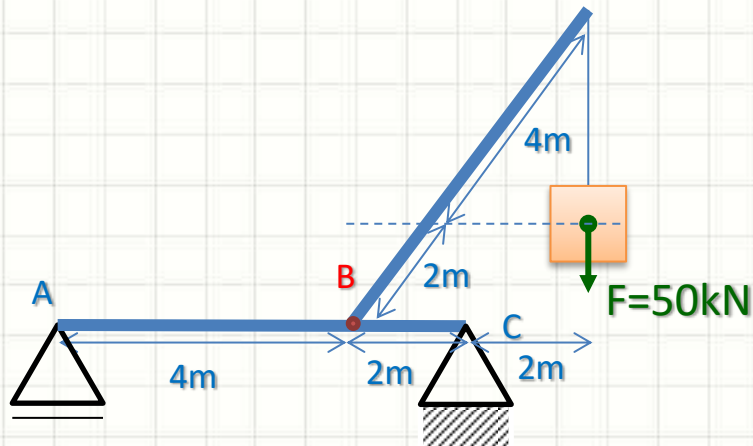
- Se a linha de ação passa pelo ponto...



O momento será zero: $M = 0!$

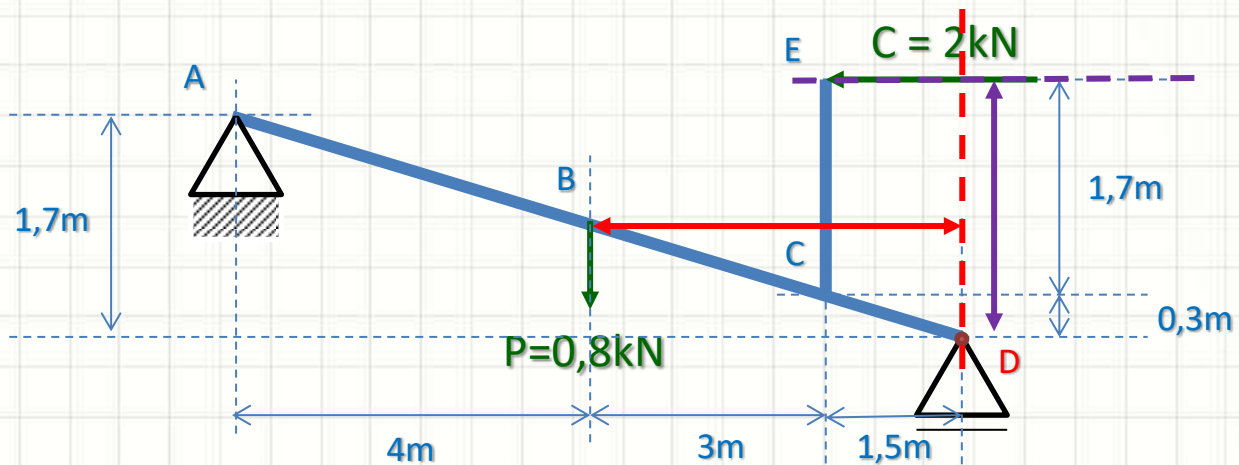
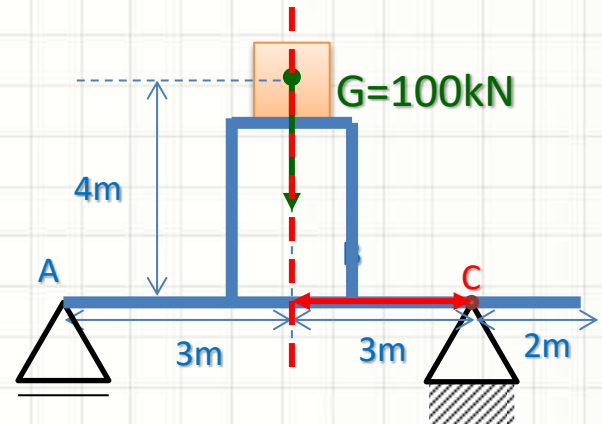
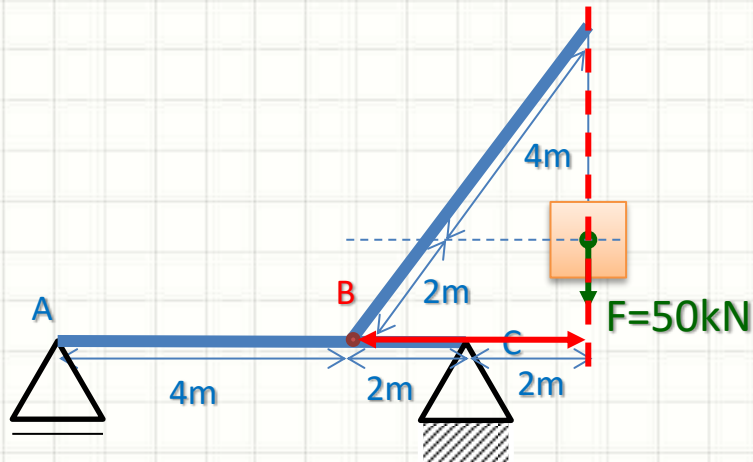
Exercício

- Qual a distância para o cálculo do momento?



Exercício

- Qual a distância para o cálculo do momento?





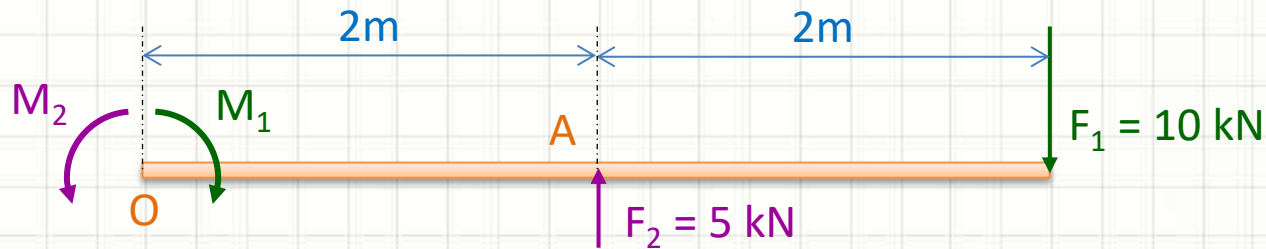
RESULTANTE DE MOMENTOS

Resultante de Momentos

- Se há várias forças agindo, pode-se calcular a resultante do momento dessas forças para um ponto qualquer da barra:

$$\vec{M}_R = \sum \vec{M}$$

Sentido positivo!



$$M_1 = 10.000.4 = 40 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 5.000.2 = -10 \text{ kN.m}$$

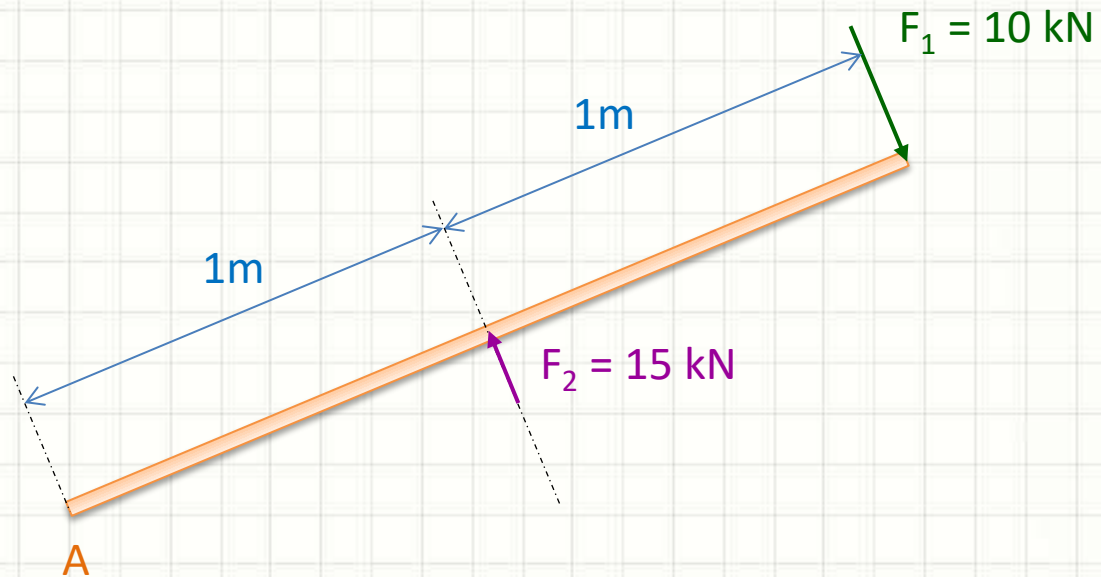
$$M_O = M_1 + M_2$$

$$M_O = 40.000 + (-10.000)$$

$$M_O = 30 \text{ kN.m}$$

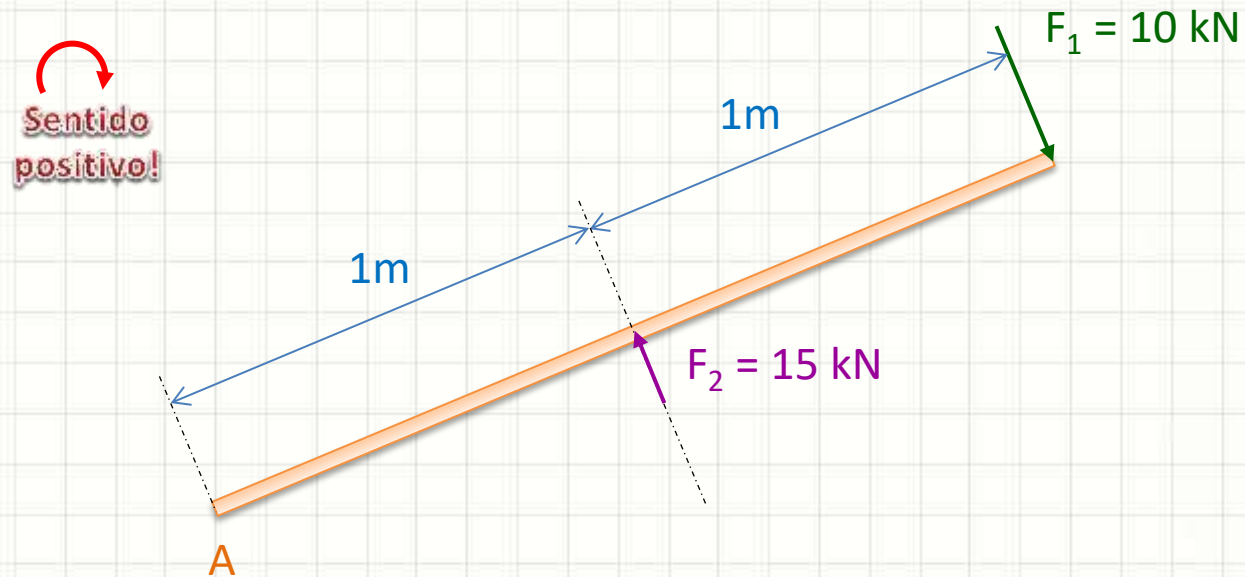
Exercício

- Calcule o Momento Resultante em A



Exercício

- Calcule o Momento Resultante em A

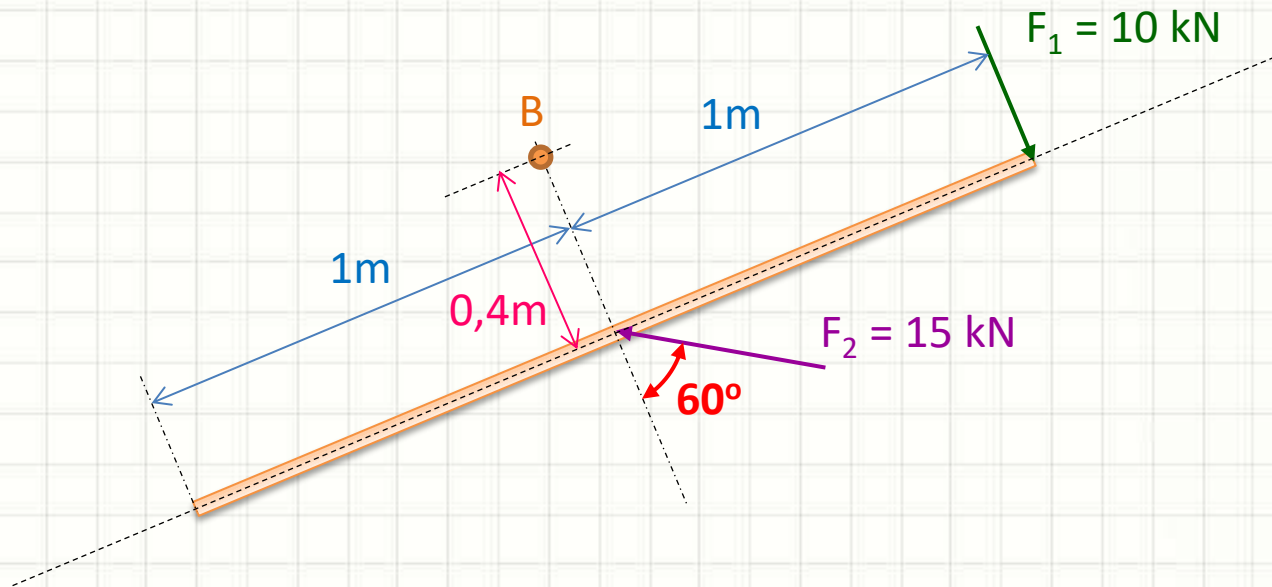


$$MR_A = \sum M_A = +10000.2 - 15000.1$$

$$MR_{RA} = -5 \text{ kN.m}$$

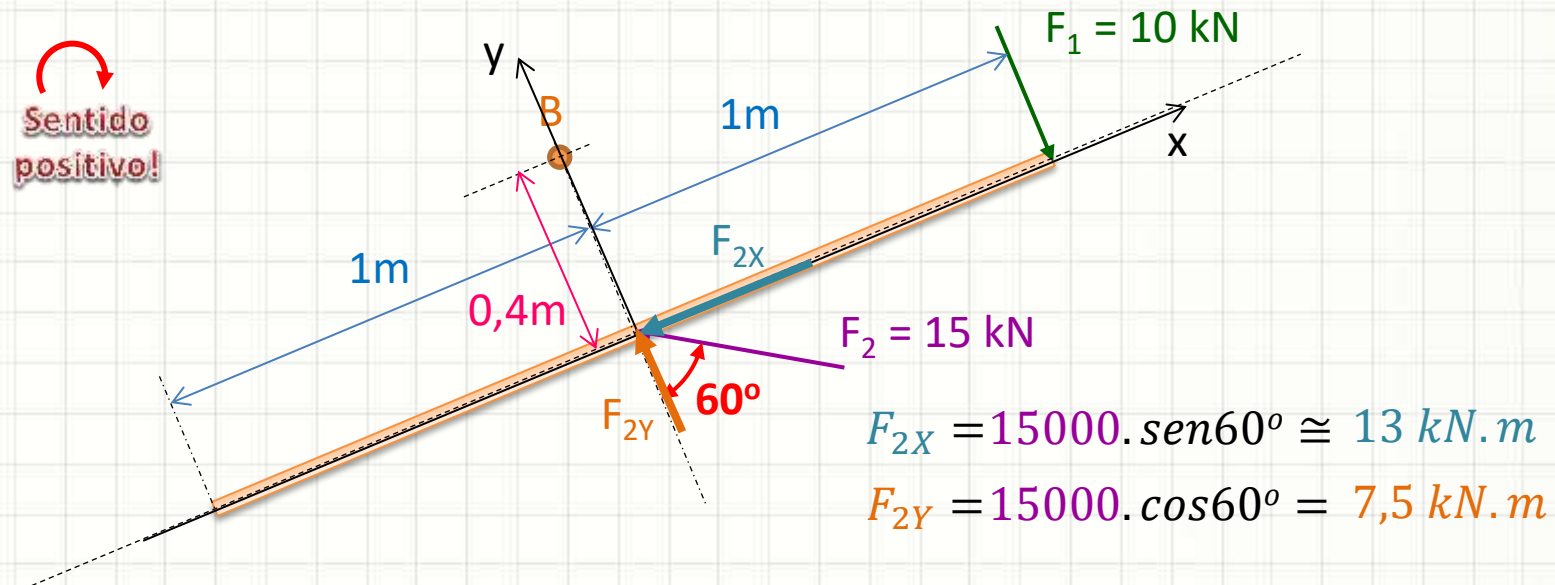
Exercício

- Calcule o Momento Resultante em B



Exercício

- Calcule o Momento Resultante em B



$$MR_B = \sum M_B = +10000 \cdot 1 + 13000 \cdot 0,4 + 7500 \cdot 0$$

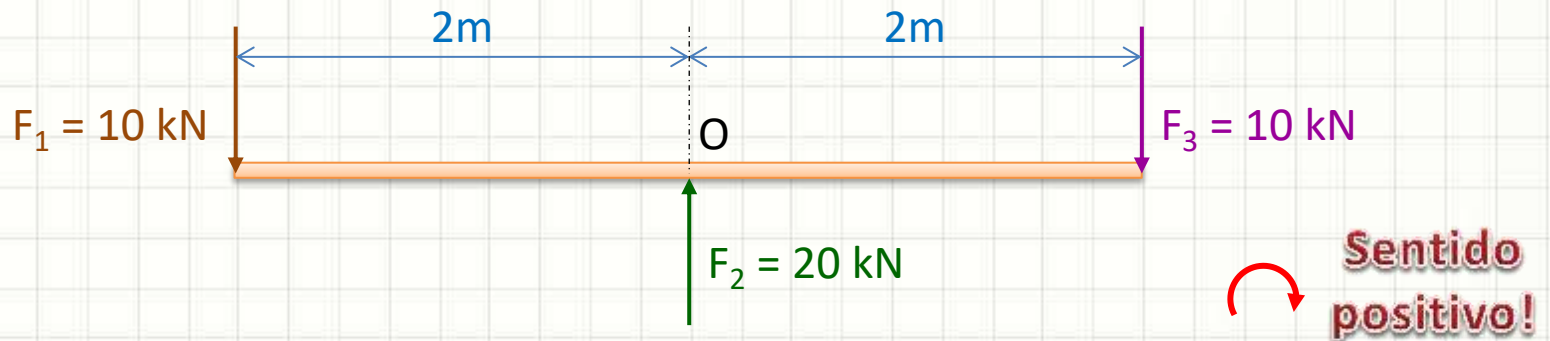
$$MR_B = +15,2 \text{ kN.m}$$



EQUILÍBRIO DE MOMENTOS

Equilíbrio de Momentos

- Calculemos o momento resultante em O



$$M_1 = 10.000.2 = -20 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 20.000.0 = 0 \text{ kN.m}$$

$$M_3 = 10.000.2 = 20 \text{ kN.m}$$

$$\overrightarrow{MR}_O = \sum \vec{M}$$

$$MR_O = M_1 + M_2 + M_3$$

$$MR_O = -20.000 + 0 + 20.000$$

$$MR_O = 0 \text{ kN.m}$$

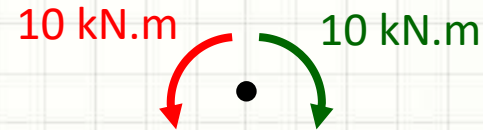
Os momentos estão em equilíbrio!

Equilíbrio de Momentos

- Sempre que a resultante dos momentos é 0
 - Momentos estão em equilíbrio!

Condição de Equilíbrio
de Momentos

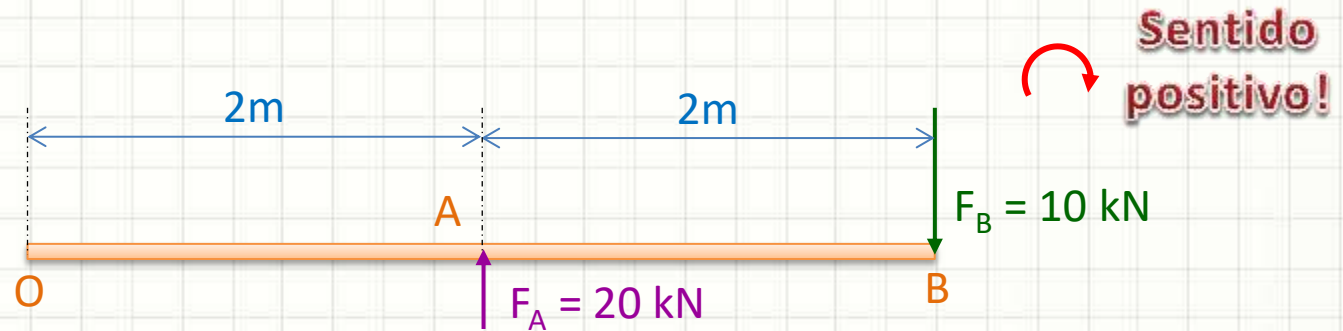
$$\overline{MR}_P = \sum \overline{M}_P = 0$$



- Equilíbrio significa “parado”?
 - “Não alterar o estado de giro” naquele plano!

Exemplo

- Verifique se há equilíbrio de momentos em O



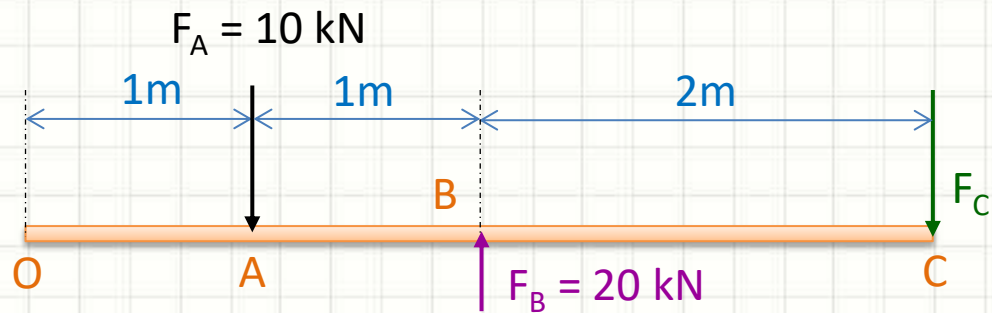
$$MR_O = \sum M_O = -20000 \cdot 2 + 10000 \cdot 2$$

$$MR_O = 0 \text{ N.m}$$

Em equilíbrio!

Exercício

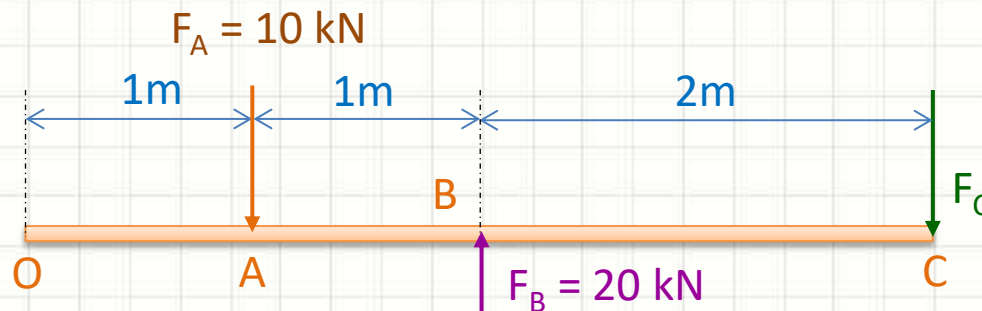
- Determine a força que deveria haver em F_C para que haja equilíbrio em O



Exercício

- Determine a força que deveria haver em F_C para que haja equilíbrio em O

 Sentido positivo!



$$MR_O = \sum M_O = 0$$

$$MR_O = +10000 \cdot 1 - 20000 \cdot 2 + F_C \cdot 4 = 0$$

$$-30000 + 4 \cdot F_C = 0$$

$$+4 \cdot F_C = 30000$$

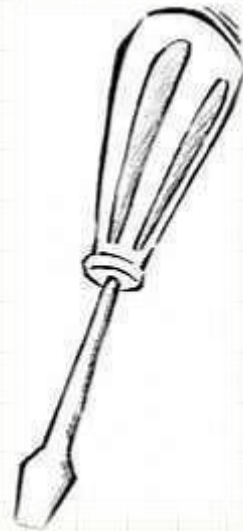
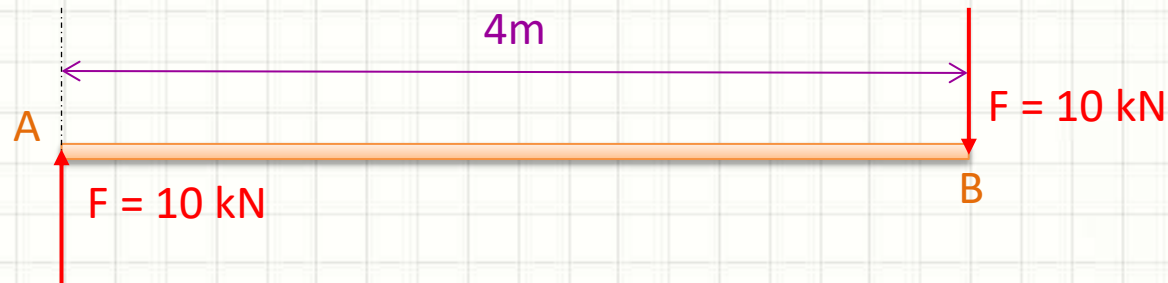
$$F_C = 7500$$



MOMENTO DE UM BINÁRIO

Momento de um Binário

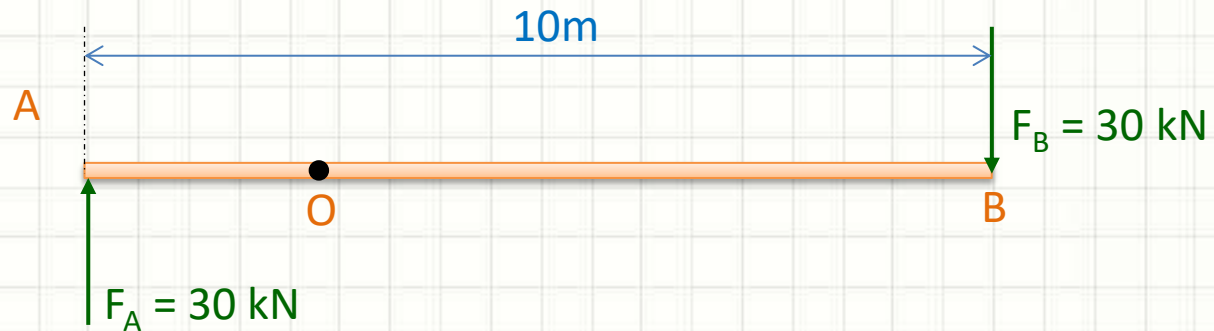
- Um binário é uma situação em que são aplicadas, em um elemento, **duas forças de igual intensidade, mesma direção e sentidos opostos**:



- Nesse caso: $M_R = F \cdot \text{braço}$
 - M_R será **constante** em qualquer ponto da barra!

Exemplo

- Qual é o momento em O?

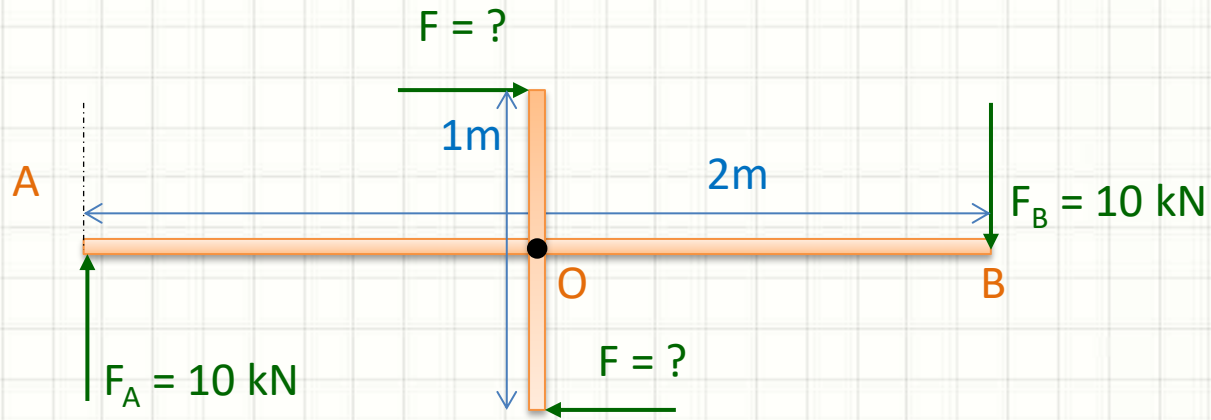


 **Sentido positivo!**

$$MB_O = +30000 \cdot 10 = 300 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

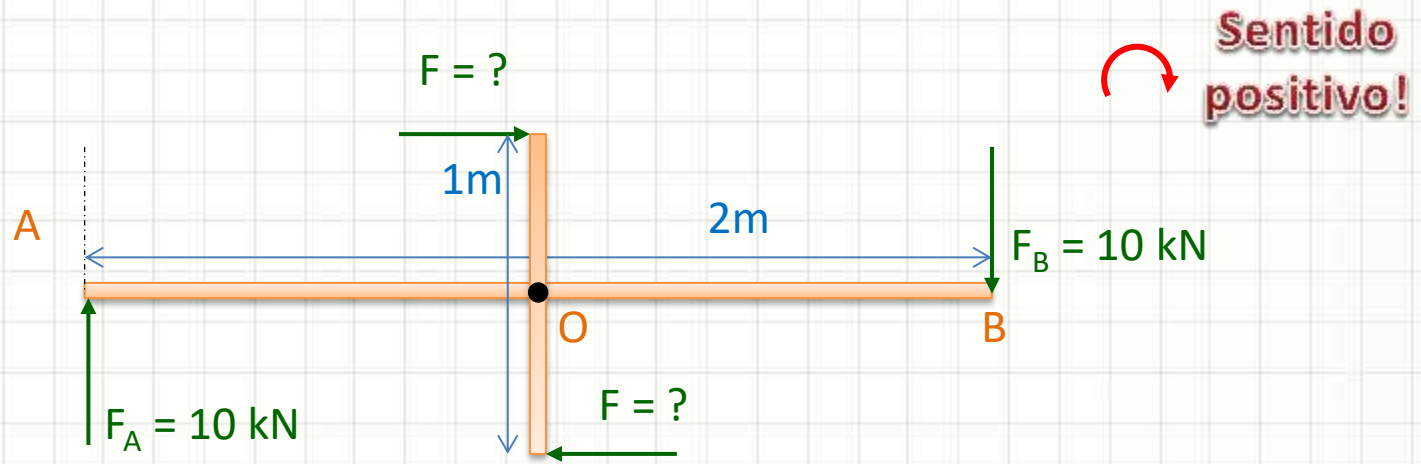
Exercício

- Qual valor F permite remover os esforços F_A e F_B mantendo o mesmo momento binário?



Exercício

- Qual valor F permite remover os esforços F_A e F_B mantendo o mesmo momento binário?



$$MB_O = +10000 \cdot 2 = 20kN.m$$

$$MB_O = 20000 N.m = +F \cdot 1 \Rightarrow \boxed{+F = 20000 N.m}$$



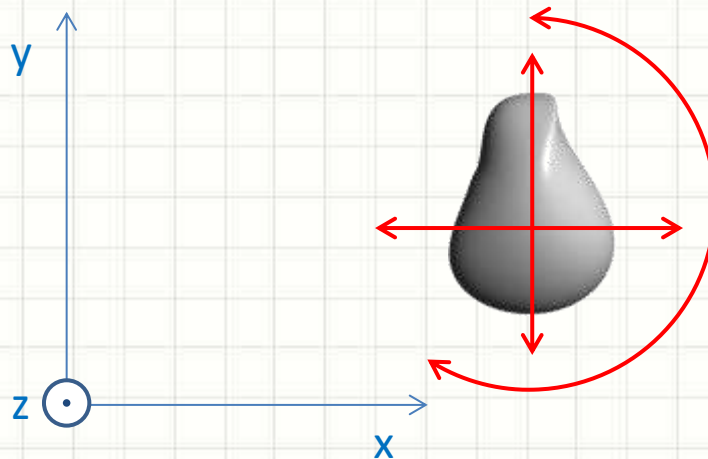
PARA ENTENDER O EQUILÍBRIO:

GRAUS DE LIBERDADE DE UM CORPO RÍGIDO

Movimentos Possíveis

- Corpo livre: quantos tipos de movimento?
- Começemos por um mundo bidimensional
 - Translação horizontal
 - Translação vertical
 - Rotação no plano (ao redor de z)

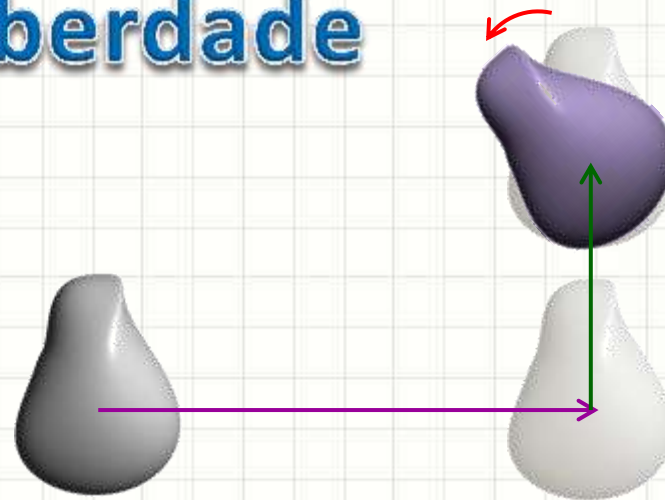
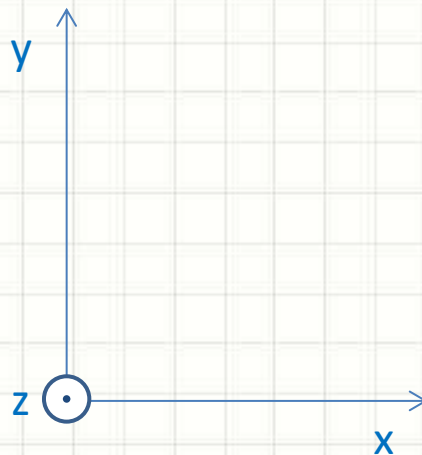
O que significa?



Posicionamento do Corpo

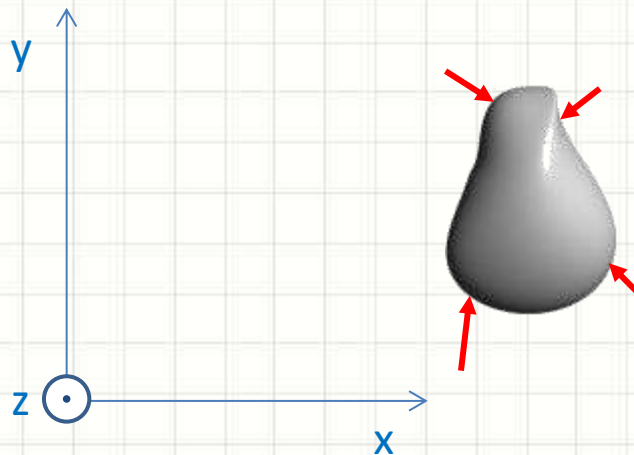
- Pode-se atingir qualquer posição...
 - Com 3 movimentos
- Quais sejam:
 - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**

3 Graus de Liberdade



Foças x Graus de Liberdade

- Corpo sob a ação de forças externas:
 - Pode ser movido dessas três maneiras
 - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**
- Como saber se o corpo está em equilíbrio?
 - Qual deve ser o valor das resultantes?

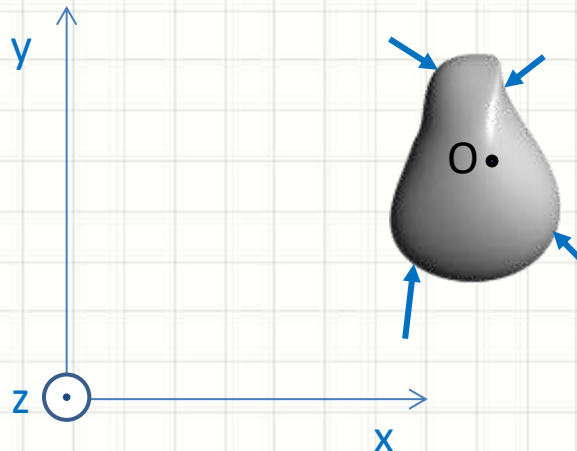




CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO

Equilíbrio de Corpo Rígido

- Primeiro, vamos formalizar um corpo rígido
 - É um corpo em que todos os pontos que o compõem são solidários entre si
- Ou seja, para verificar o equilíbrio de um corpo rígido, basta verificar o que acontece em um ponto arbitrário do mesmo



Equilíbrio de Corpo Rígido

- Para equilíbrio, forças não devem provocar:
 - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**
- Ou seja, equilíbrio: resultantes zero

Condição de
Equilíbrio em X

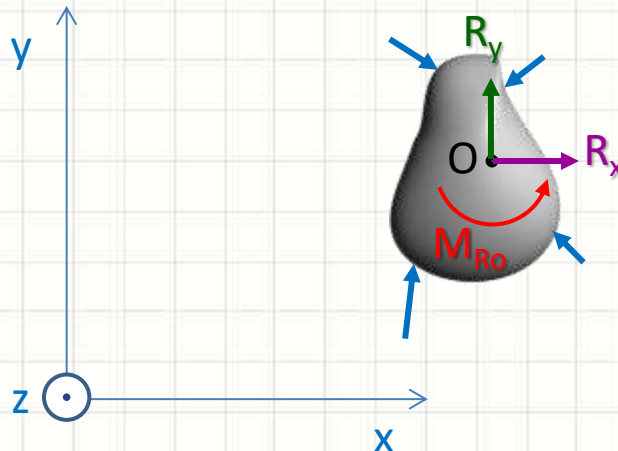
$$R_x = \sum F_x = 0$$

Condição de
Equilíbrio em Y

$$R_y = \sum F_y = 0$$

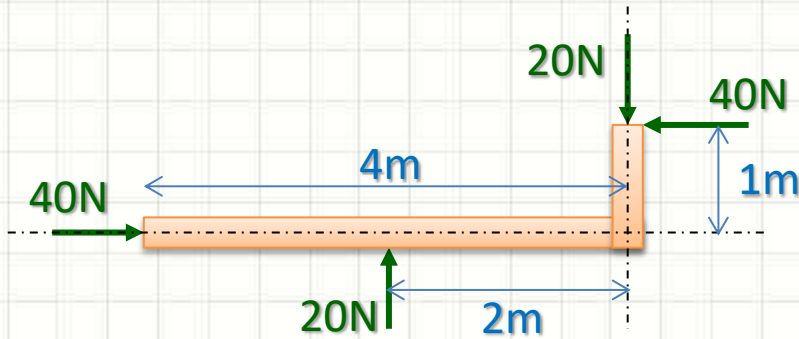
Condição de
Equilíbrio de Momentos

$$M_{R_O} = \sum M_O = 0$$



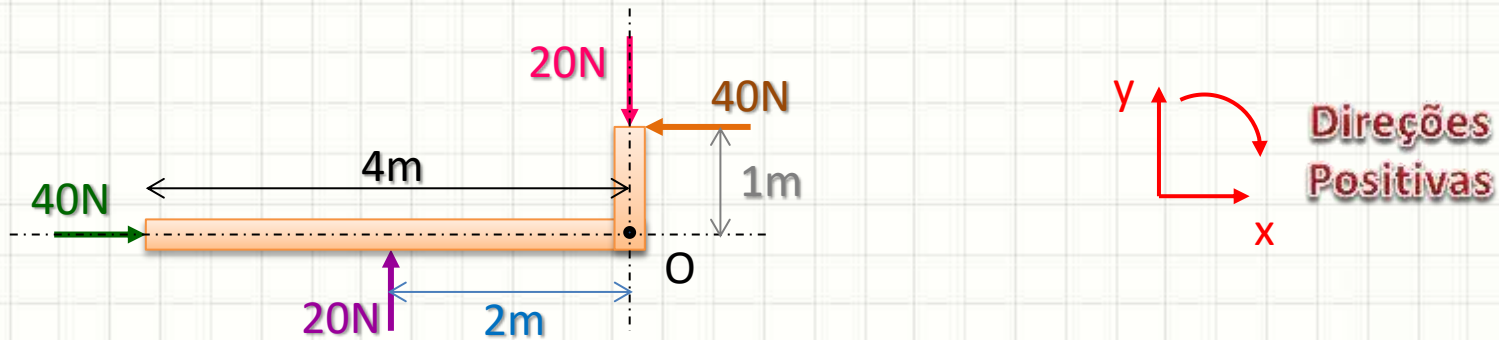
Exemplo

- Verifique se está em equilíbrio estático



Exemplo

- Verifique se está em equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +40 - 40 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

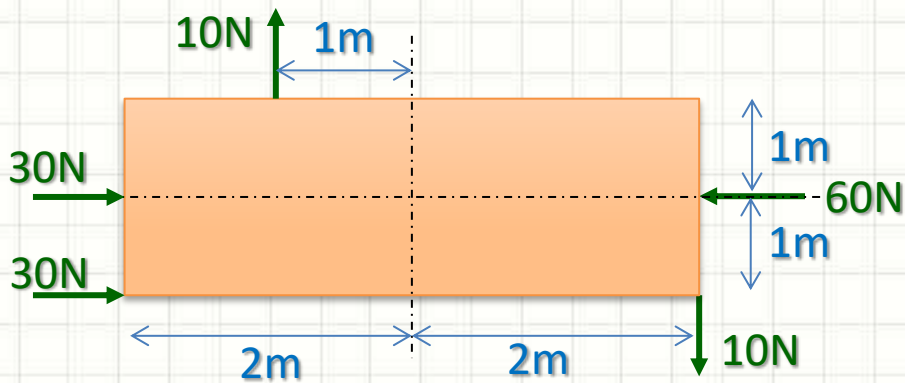
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +20 - 20 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(20 \cdot 2) - (40 \cdot 1) = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

Corpo em
Equilíbrio!

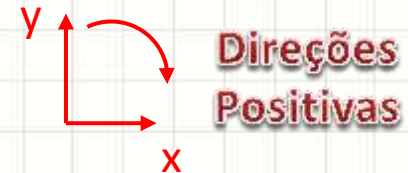
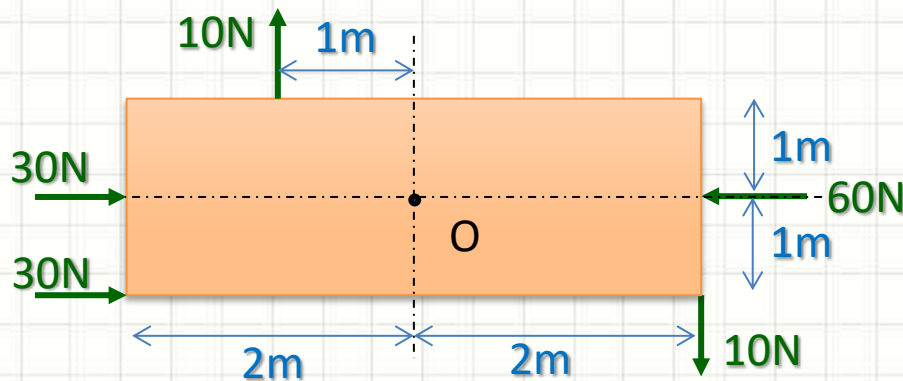
Exercício

- Verifique se está em equilíbrio estático



Exercício

- Verifique se está em equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +30 + 30 - 60 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

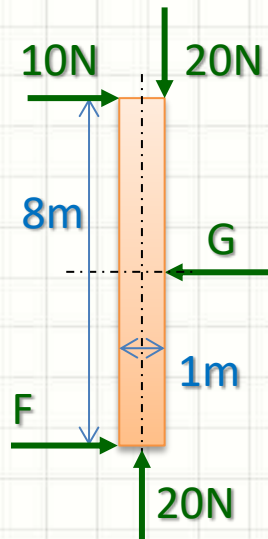
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +10 - 10 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(30 \cdot 0) - (30 \cdot 1) + (10 \cdot 2) + (60 \cdot 0) + (10 \cdot 1) = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

Corpo em
Equilíbrio!

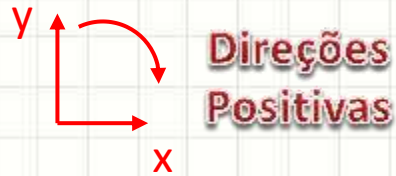
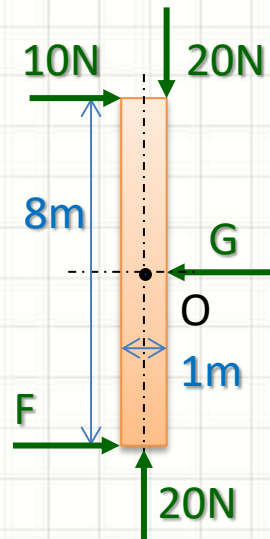
Exercício

- Qual os valores de F e G para equilíbrio?



Exercício

- Qual os valores de F e G para equilíbrio?



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +10 + F - G = 0 \quad \Rightarrow G = F + 10$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -20 + 20 = 0$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(10 \cdot 4) + (20 \cdot 0,5) + (G \cdot 0) + (20 \cdot 0) - (F \cdot 4) = 0$$

$$\Rightarrow 40 + 10 - 4F = 0 \quad \Rightarrow F = 12,5N$$

$$\therefore G = 22,5N$$



CONCLUSÕES

Resumo

- Equilíbrio de Momentos
- Binário de Forças
- Graus de liberdade: movimentos possíveis
- Corpos Rígidos: partículas solidárias
- Equilíbrio do Corpo: forças e momentos
- **TAREFA:** Exercícios Aula 2

-
- Diagramas de Corpo Livre
 - Vínculos
 - Cálculos de reações!



PERGUNTAS?