



# **MECÂNICA DOS SÓLIDOS**

## **DIAGRAMAS DE CORPO LIVRE E REAÇÕES DE APOIO**

Prof. Dr. Daniel Caetano

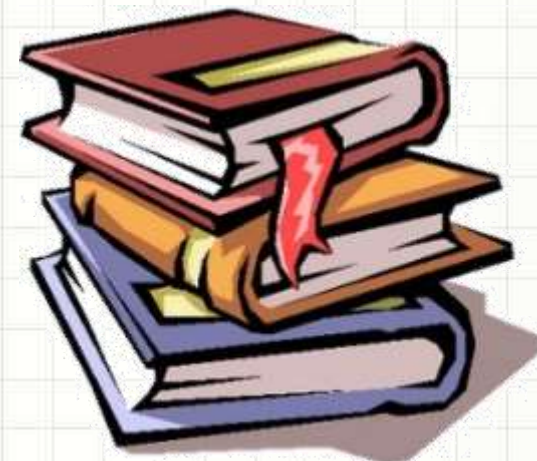
2019 - 2

# Objetivos

- Conhecer os tipos de vínculo de estruturas bidimensionais
- Compreender o conceito de Grau de Hiperestaticidade de estruturas simples
- Calcular reações de apoio em estruturas hiperestáticas simples
- **Atividade Aula 3 – SAVA!**



# Material de Estudo



---

<b>Material</b>	<b>Acesso ao Material</b>
Apresentação	<a href="http://www.caetano.eng.br/">http://www.caetano.eng.br/</a> (Mecânica dos Sólidos – Aula 3)
Material Didático	Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 2 (SAVA)
Minha Biblioteca	Estática e Mecânica dos Materiais (BEER;JOHNSTON), Cap. 4
Biblioteca Virtual	Livro: Estática (HIBBELER), Cap 5.
Material Adicional	Apostila de Análise Estrutural UFSC: <a href="https://bit.ly/2xkw4bE">https://bit.ly/2xkw4bE</a>



**RELEMBRANDO:**  
**EQUILÍBRIO DE**  
**CORPOS RÍGIDOS**

# Equilíbrio de Forças

- Sempre que a resultante em uma direção é 0
  - Existe um equilíbrio de forças naquela direção

Condição de  
Equilíbrio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$



## Se equilibram!

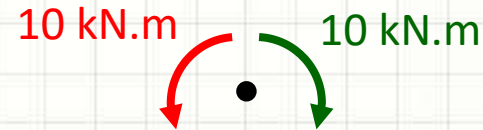
- Equilíbrio significa “parado”?
  - “Sem alterar estado de movimento” na direção!

# Equilíbrio de Momentos

- Sempre que a resultante dos momentos é 0
  - Momentos estão em equilíbrio!

Condição de Equilíbrio  
de Momentos

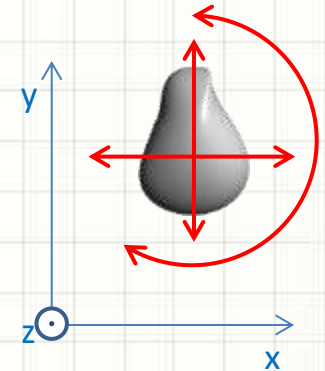
$$\vec{M}_R = \sum \vec{M} = 0$$



- Equilíbrio significa “parado”?
  - “Não alterar o estado de giro” naquele plano!

# Graus de Liberdade e Equilíbrio

- No plano, corpo rígido: 3 graus de liberdade
  - Translação horizontal
  - Translação vertical
  - Rotação no plano (ao redor de z)



- Condição de Equilíbrio do Corpo Rígido

**Condição de  
Equilíbrio em X**

$$R_x = \sum F_x = 0$$

**Condição de  
Equilíbrio em Y**

$$R_y = \sum F_y = 0$$

**Condição de  
Equilíbrio de Momentos**

$$M_{Ro} = \sum M_o = 0$$

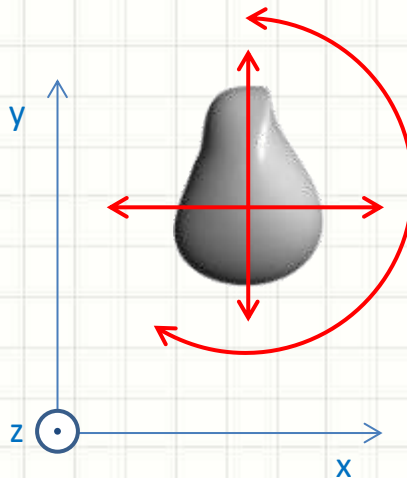


# VÍNCULOS DE UM CORPO RÍGIDO



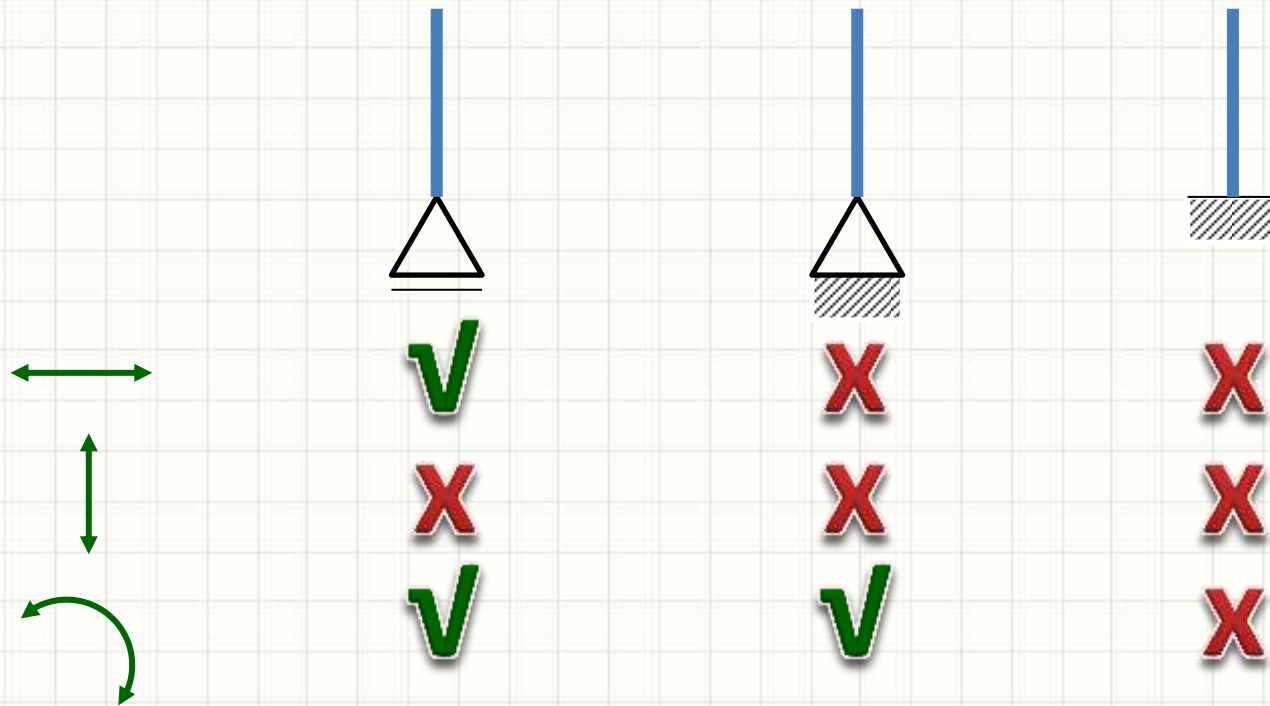
# Equilíbrio x Movimento

- Equilíbrio: manutenção do estado
  - Parado x Movimento
- Para garantir ausência de movimento...
  - É necessário “fixar” o elemento



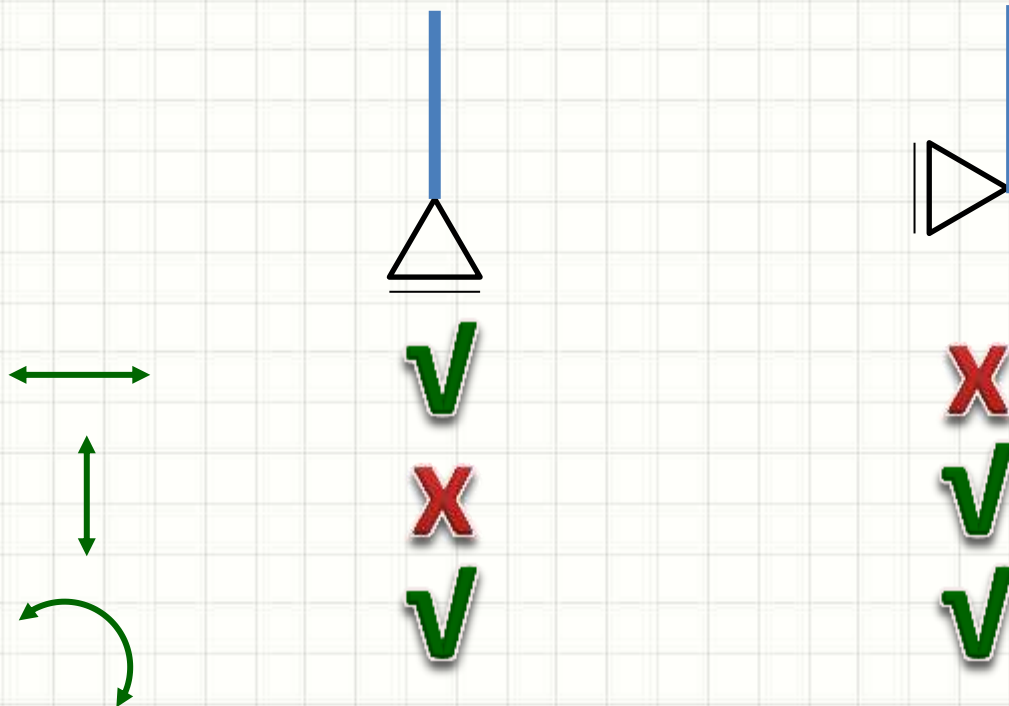
# Vínculos de um Corpo Rígido

- Vincular: prender, ligar
- No plano, pode-se vincular para restringir
  - Um, dois ou todos os graus de liberdade



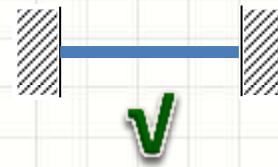
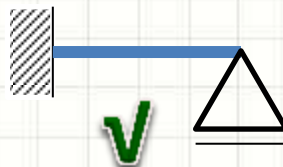
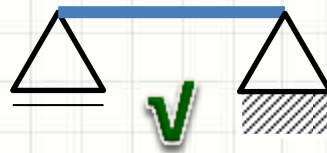
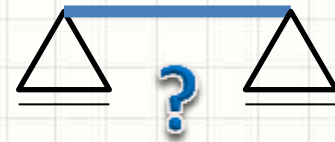
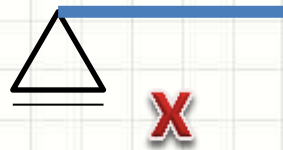
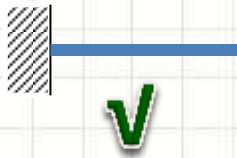
# Vínculos de um Corpo Rígido

- Vincular: prender, ligar
- No plano, pode-se vincular para restringir
  - Um, dois ou todos os graus de liberdade



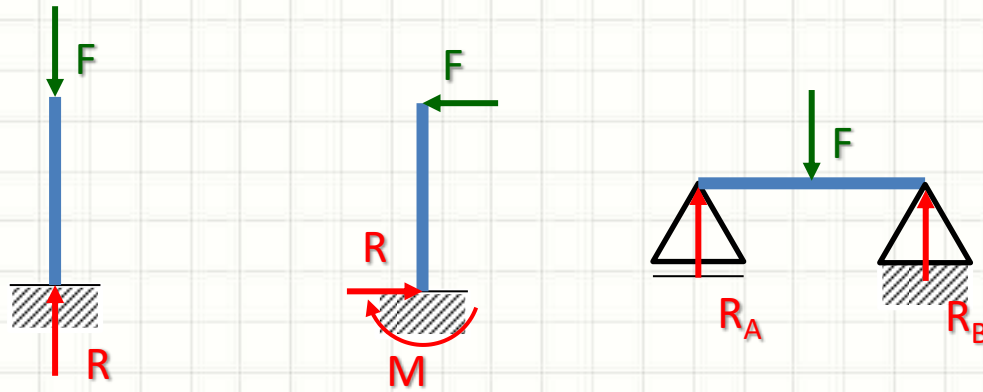
# Vínculos x Equilíbrio Estático

- Equilíbrio estático
  - Todos os graus de liberdade impedidos
- Quais estão em equilíbrio estático?



# Reações de Apoio

- O equilíbrio ocorre porque...
  - Os vínculos impõem reações aos esforços



Reações de Apoio

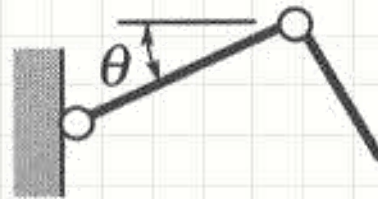
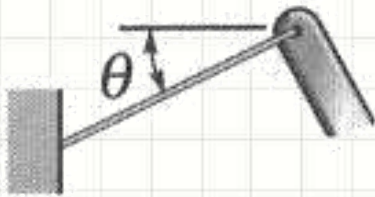
- Cada tipo **pode** impor diferentes reações



Como Calcular?

# Vínculos, símbolos e reações

Cabo

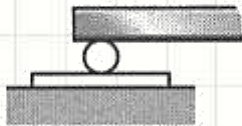
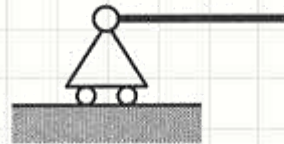
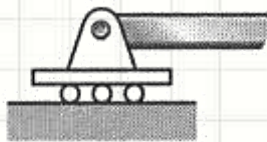


Ligação esbelta

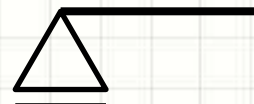
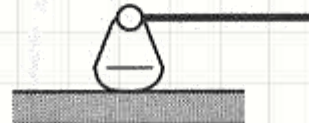


# Vínculos, símbolos e reações

Roletes

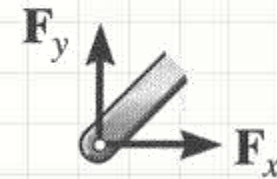
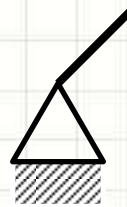
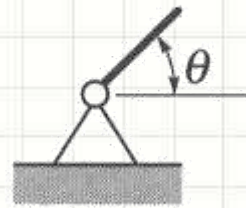
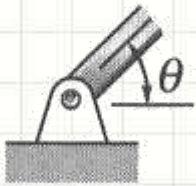


Rótula

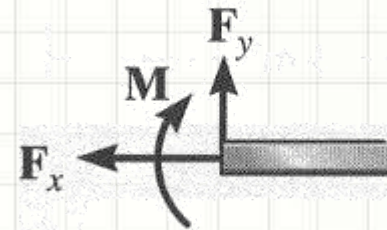
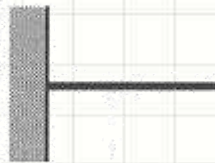
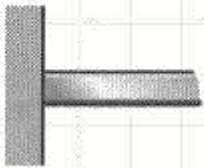


# Vínculos, símbolos e reações

Articulação



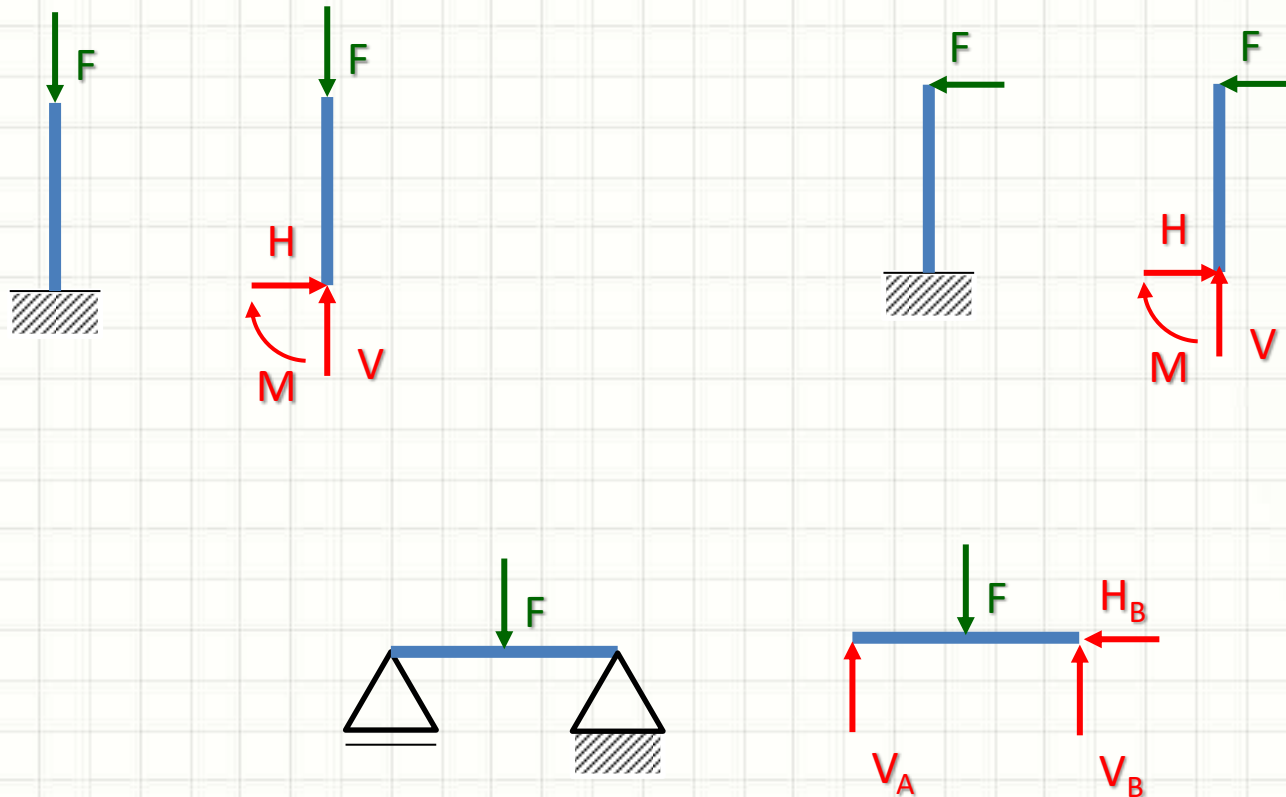
Apoio rígido (engaste)





# Diagrama de Corpo Livre

- Redesenho da estrutura substituindo seus vínculos pelas potenciais reações:

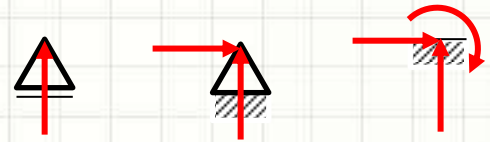
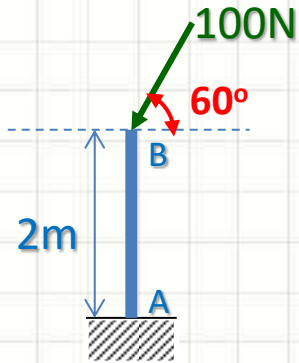




# **EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO**

# Exemplo

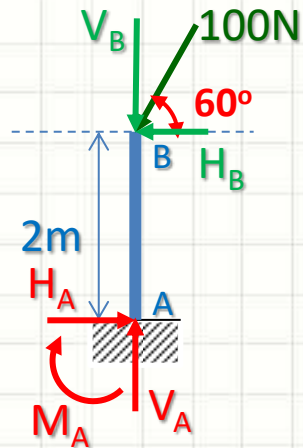
- Calcule as reações de apoio



# Exemplo



- Calcule as reações de apoio

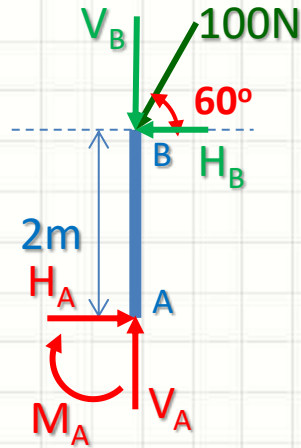


1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)

# Exemplo



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)
2. Decompor os esforços nos eixos x e y

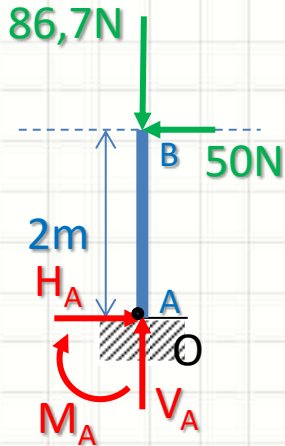
$$H_B = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 \cong 50N$$

$$V_B = 100 \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,867 \cong 86,7N$$

# Exemplo



- Calcule as reações de apoio

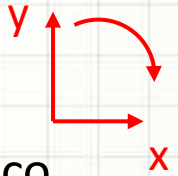


1. Diagrama de corpo livre (estimar o sentido)
2. Decompor os esforços nos eixos x e y

$$H_B = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 \cong 50N$$

$$V_B = 100 \cdot \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,867 \cong 86,7N$$

3. Identificar as direções positivas
4. Determinar as reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_A - 50 = 0 \quad \Rightarrow H_A = 50N$$

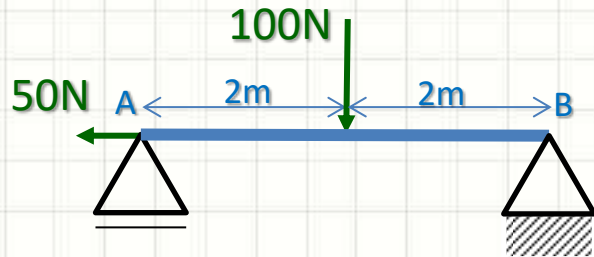
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 86,7 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 86,7N$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(86,7 \cdot 0) - (50 \cdot 2) + (V_A \cdot 0) + (H_A \cdot 0) + M_A = 0 \Rightarrow M_A = 100N \cdot m$$

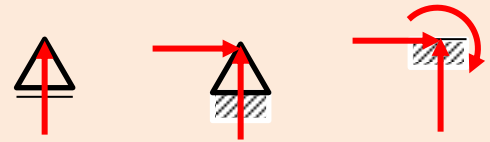
# Exercício



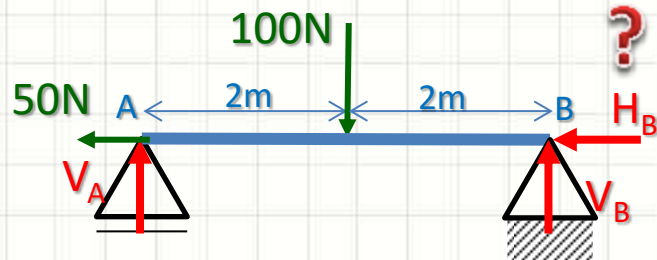
- Calcule as reações de apoio



# Exercício



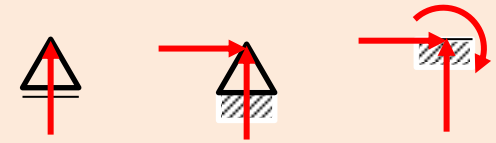
- Calcule as reações de apoio



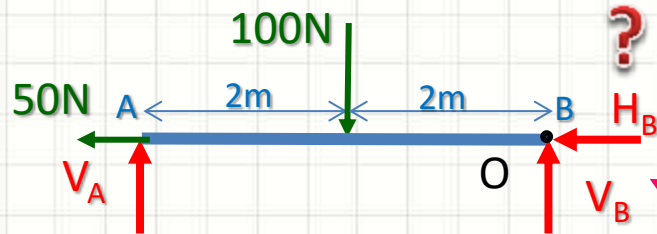
1. Diagrama de corpo livre



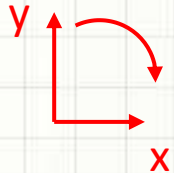
# Exercício



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -50 - H_B = 0 \quad \Rightarrow H_B = -50N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 100 + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 100 - V_A$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(V_A \cdot 4) + (50 \cdot 0) - (100 \cdot 2) + (V_B \cdot 0) + (H_B \cdot 0) = 0$$

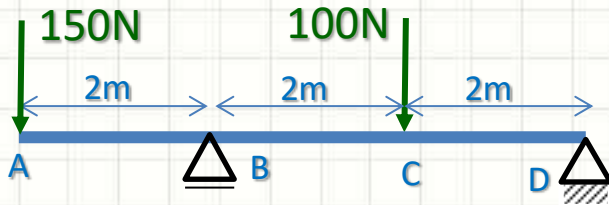
$$\Rightarrow 4 \cdot V_A = 200$$

$$\Rightarrow V_A = 50N \quad \therefore V_B = 50N$$

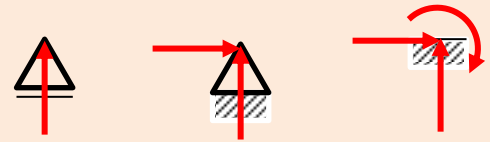
# Exercício



- Calcule as reações de apoio

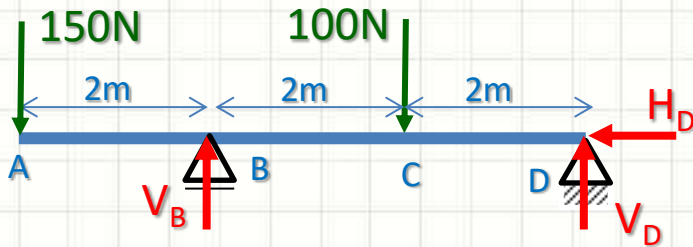


# Exercício

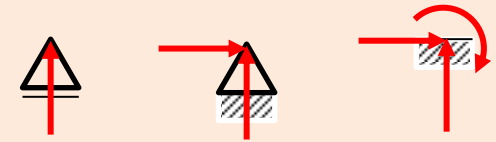


- Calcule as reações de apoio

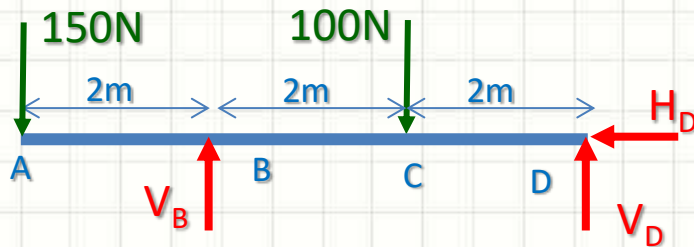
1. Diagrama de corpo livre



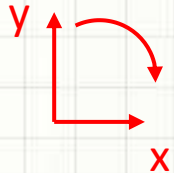
# Exercício



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_D = 0 \Rightarrow H_D = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -150 + V_B - 100 + V_D = 0 \Rightarrow V_D = 250 - V_B$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -(150 \cdot 6) + (V_B \cdot 4) - (100 \cdot 2) + (V_D \cdot 0) + (H_D \cdot 0) = 0$$

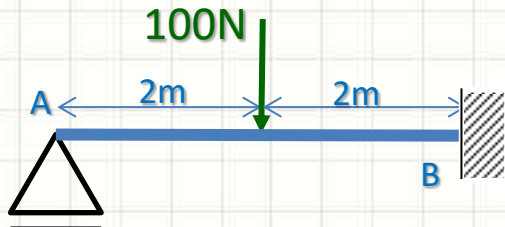
$$\Rightarrow 4 \cdot V_B = 1100$$

$$\Rightarrow V_B = 275N \quad \therefore V_D = -25N$$

# Outro Exemplo



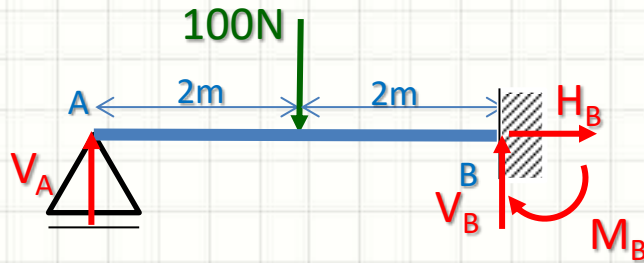
- Calcule as reações de apoio



# Outro Exemplo



- Calcule as reações de apoio

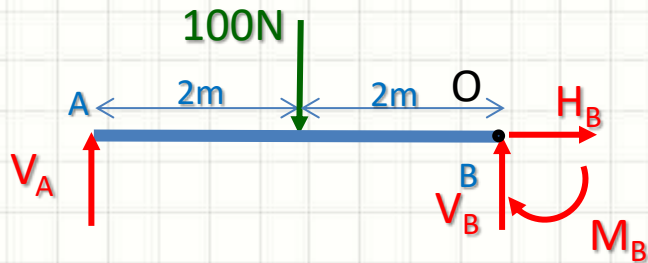


1. Diagrama de corpo livre

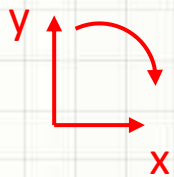
# Outro Exemplo



- Calcule as reações de apoio



1. Diagrama de corpo livre
2. Decompor os esforços nos eixos x e y
3. Identificar as direções positivas
4. Reações pelo equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = 0 \Rightarrow H_B = 0N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A - 100 + V_B = 0 \Rightarrow V_B = 100 - V_A$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow +(V_A \cdot 4) - (100 \cdot 2) + (V_B \cdot 0) + (H_B \cdot 0) + M_B = 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot V_A = 200 - M_B$$

$$\Rightarrow V_A = \left(50 - \frac{M_B}{4}\right)N$$

**Por que não conseguimos resolver?**  
**E Agora?**



**GRAU DE HIPERESTATICIDADE  
DE UMA ESTRUTURA DE  
CORPO RÍGIDO PLANA**

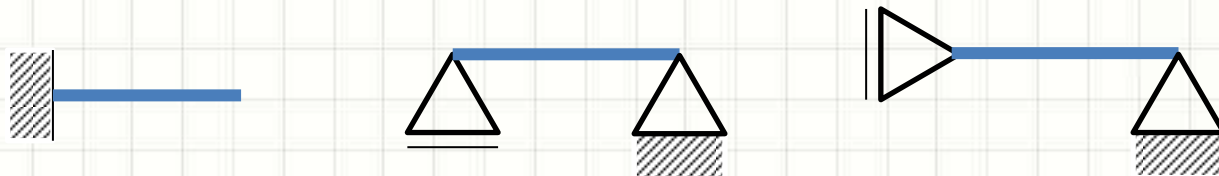


# Grau de Hiperestaticidade

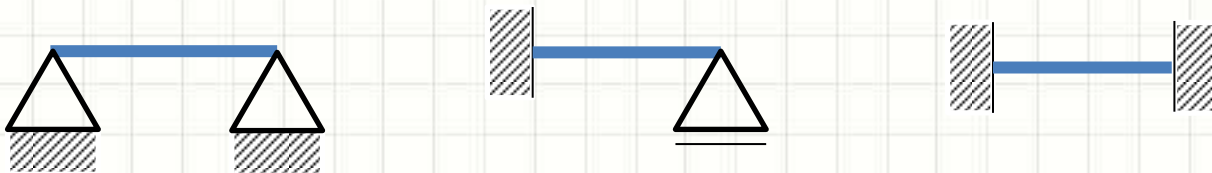
- Equilíbrio de movimentos e vínculos
  - Hipostáticos: vínculos  $<$  movimentos possíveis



- Isostáticos: vínculos  $=$  movimentos possíveis

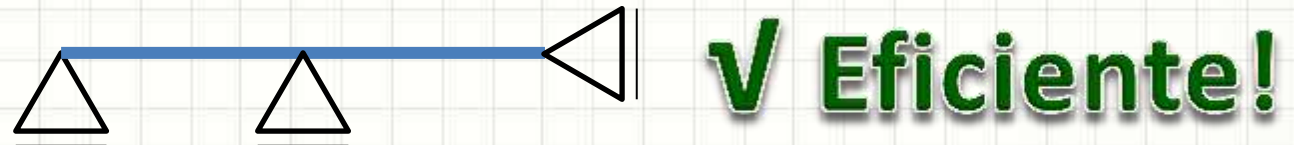


- Hiperestáticos: vínculos  $>$  movimentos possíveis



# Grau de Hiperestaticidade

- Nota importante
  - Vínculos precisam estar dispostos eficientemente



# Estruturas Estaticamente Determinadas

- As estruturas **isostáticas**
  - São classificadas: “Estaticamente Determinadas”
- Por quê?
  - Porque as reações podem ser determinadas por:

Condição de  
Equilíbrio em X

$$R_x = \sum F_x = 0$$

Condição de  
Equilíbrio em Y

$$R_y = \sum F_y = 0$$

Condição de  
Equilíbrio de Momentos

$$M_{Ro} = \sum M_o = 0$$

- E as hiperestáticas
  - Dependem de outras considerações! Depois!

# Cálculo: Grau de Hiperestaticidade

- Calcula-se pela equação:

$$gh = C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3.m$$

– gh: grau de hiperestaticidade

- $gh < 0$  : hipostática
- $gh = 0$  : isostática
- $gh > 0$  : hiperestática

–  $C_1$ : vínculos que restringem 1 grau de liberdade

–  $C_2$ : vínculos que restringem 2 graus de liberdade

–  $C_3$ : vínculos que restringem 3 graus de liberdade

– m: número de barras do sistema

# Exemplo

- Calcule o grau de hiperestaticidade



# Exemplo

- Calcule o grau de hiperestaticidade



$$gh = C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 - 3.m$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 1$$

$$C_3 = 0$$

$$m = 1$$

$$gh = 1 + 2.1 + 3.0 - 3.1$$

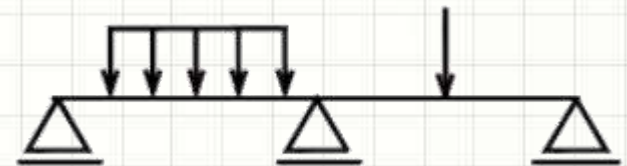
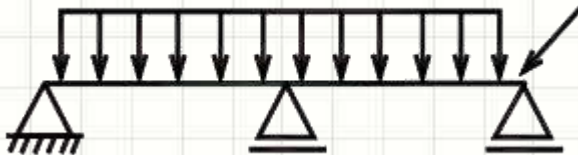
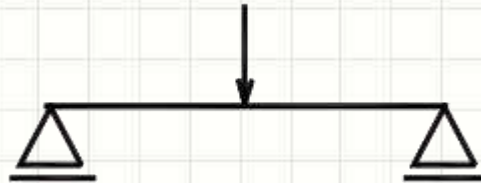
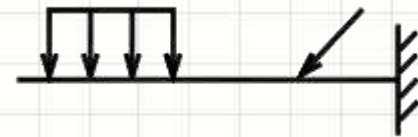
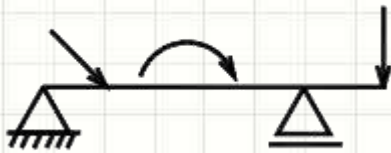
$$gh = 1 + 2 + 0 - 3$$

$$gh = 0$$

**Isostática**

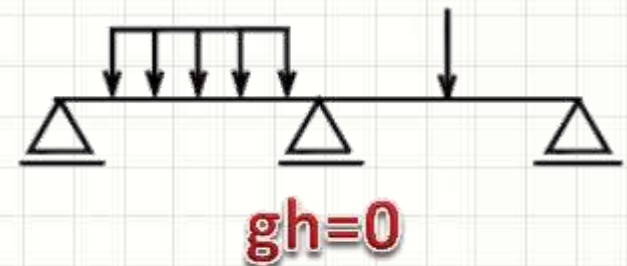
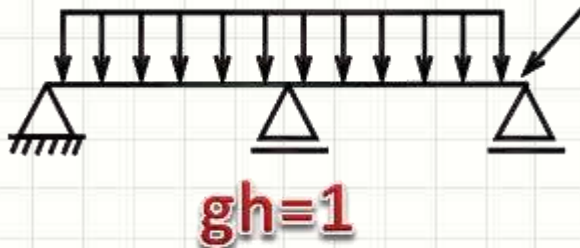
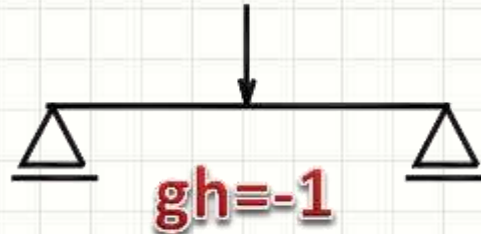
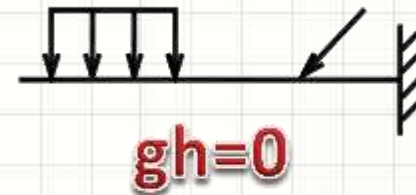
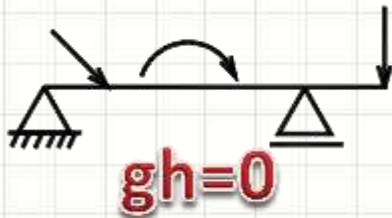
# Exercício

- Calcule o grau de hiperestaticidade



# Exercício

- Calcule o grau de hiperestaticidade







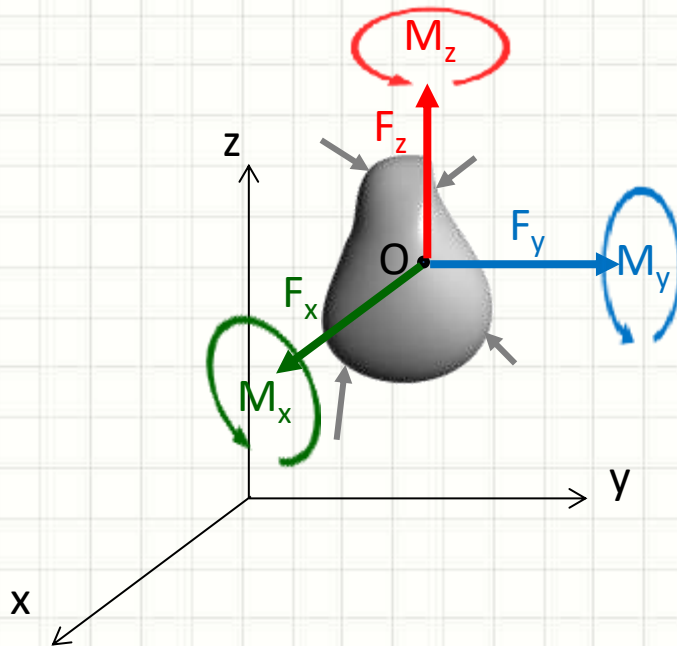
ESTENDENDO O CONCEITO:

# **EQUILÍBRIO ESTÁTICO TRIDIMENSIONAL**

# Equilíbrio de Corpo Rígido em 3D

- Para equilíbrio, forças não devem provocar:
  - Translação em  $x$ ,  $y$  e  $z$
  - Rotação ao redor de  $x$ ,  $y$  e  $z$

**6 graus de liberdade!**



Equilíbrio em X

$$\sum F_x = 0$$

Momento X em O

$$\sum M_{xo} = 0$$

Equilíbrio em Y

$$\sum F_y = 0$$

Momento Y em O

$$\sum M_{yo} = 0$$

Equilíbrio em Z

$$\sum F_z = 0$$

Momento Z em O

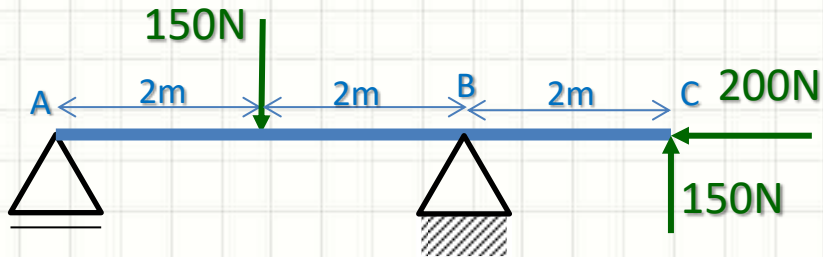
$$\sum M_{zo} = 0$$



# EXERCÍCIO

# Exercício (para Entrega!)

- Calcule as reações de apoio  $V_A$ ,  $V_B$  e  $H_B$



$$V_A = 150N$$

$$V_B = -150N$$



# CONCLUSÕES

# Resumo

- Equilíbrio estático  $\leftrightarrow$  vínculos
- Diversos tipos de vínculo
- Diagramas de corpo livre
- Grau de Hiperestaticidade
- Generalização para espaço 3D
- **TAREFA:** Exercícios Aula 3

- 
- Diagramas de Corpo Livre
    - Exercitar cálculos de reações!



**PERGUNTAS?**



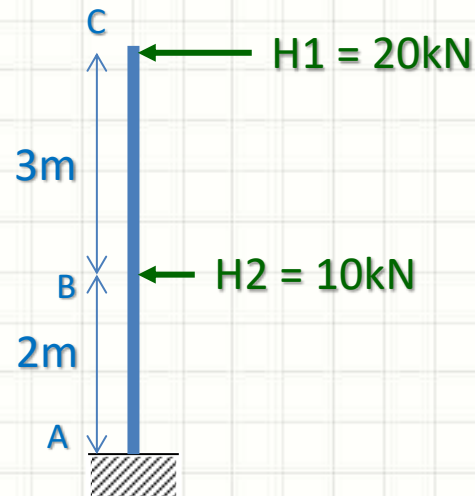
# **EXERCÍCIOS ADICIONAIS DE APLICAÇÃO**



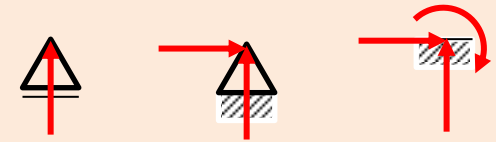
# Exercício 1



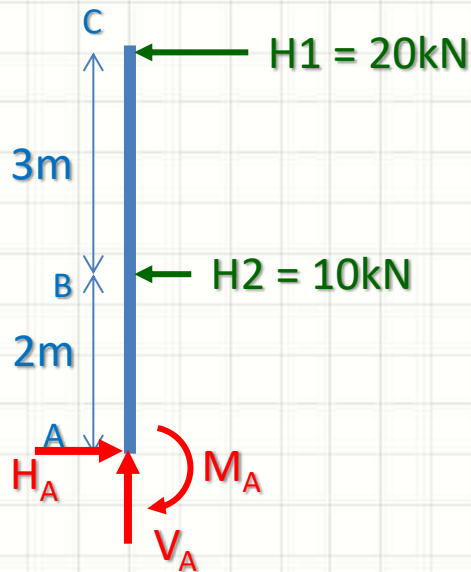
- A estrutura de uma placa recebe os esforços abaixo. Determine os esforços na base, ou seja, as reações de apoio:



# Exercício 1



- A estrutura de uma placa recebe os esforços abaixo. Determine os esforços na base, ou seja, as reações de apoio:

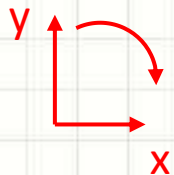


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -H_1 - H_2 + H_A = 0 \Rightarrow H_A = 30kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A = 0 \Rightarrow V_A = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -(20000 \cdot 5) - (10000 \cdot 2) + M_A = 0$$

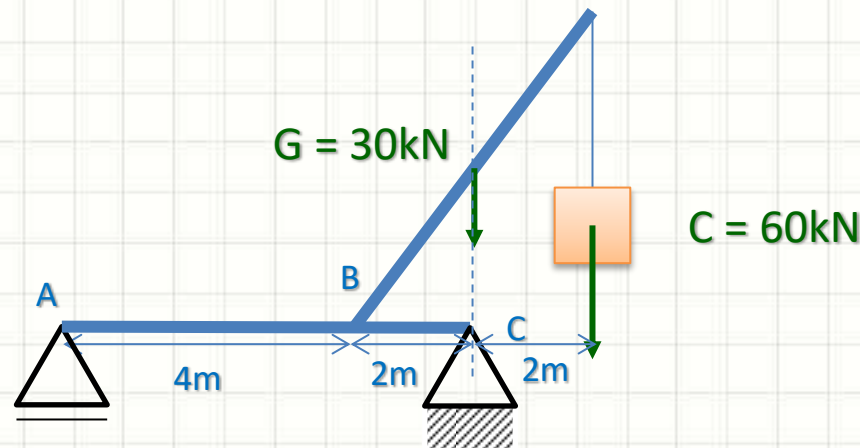
$$\Rightarrow M_A = 120000 = 120kN$$



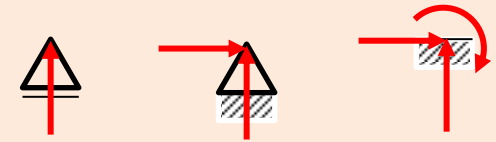
# Exercício 2



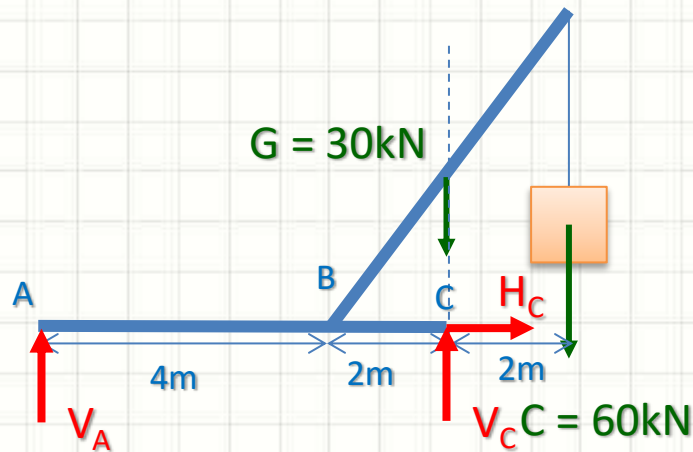
- Um guindaste é preso solidariamente a uma viga, que por sua vez está vinculada ao chão. As forças agindo são as indicadas.  
A) Calcule os esforços realizados pelos apoios



# Exercício 2



- Um guindaste é preso solidariamente a uma viga, que por sua vez está vinculada ao chão. As forças agindo são as indicadas.  
A) Calcule os esforços realizados pelos apoios



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_C = 0 \Rightarrow H_C = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +V_A + V_C - C - G = 0$$

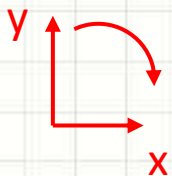
$$\Rightarrow +V_A + V_C = 90000$$

$$\Rightarrow V_C = 90000 - V_A$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow (V_A \cdot 6) + (C \cdot 2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot V_A = -120000$$

$$\Rightarrow V_A = -20000 = -20 \text{ kN}$$

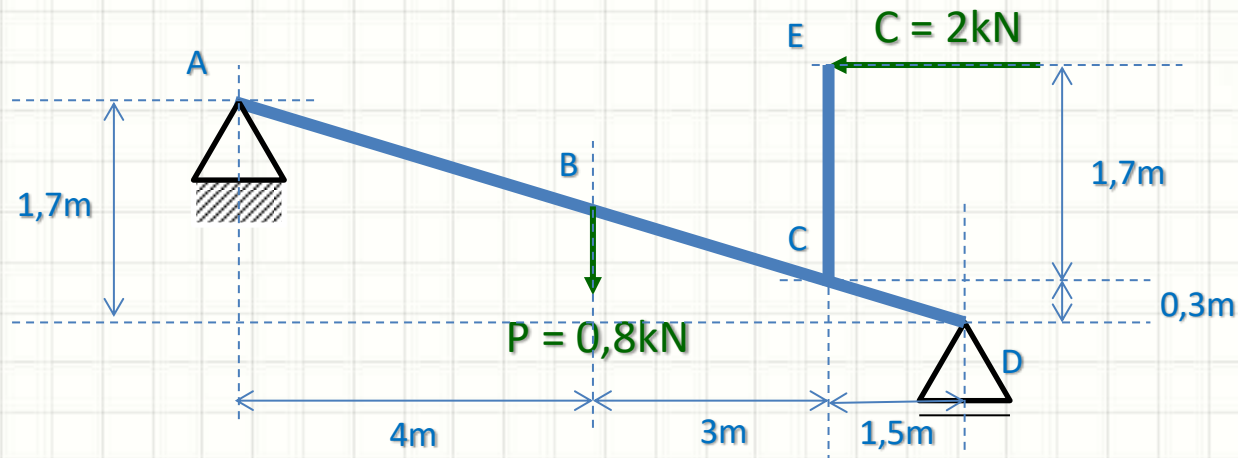
$$\therefore V_C = 110 \text{ kN}$$



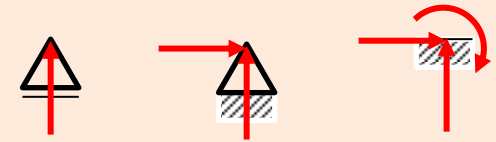
# Exercício 3



- Um homem está parado sobre a viga de um telhado, à qual também está presa uma antena que sofre a ação do vento.  
A) Calcule as reações no apoio da viga



# Exercício 3



- Um homem está parado sobre a viga de um telhado, à qual também está presa uma antena que sofre a ação do vento.

A) Calcule as reações no apoio da viga

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +H_A - C = 0$$

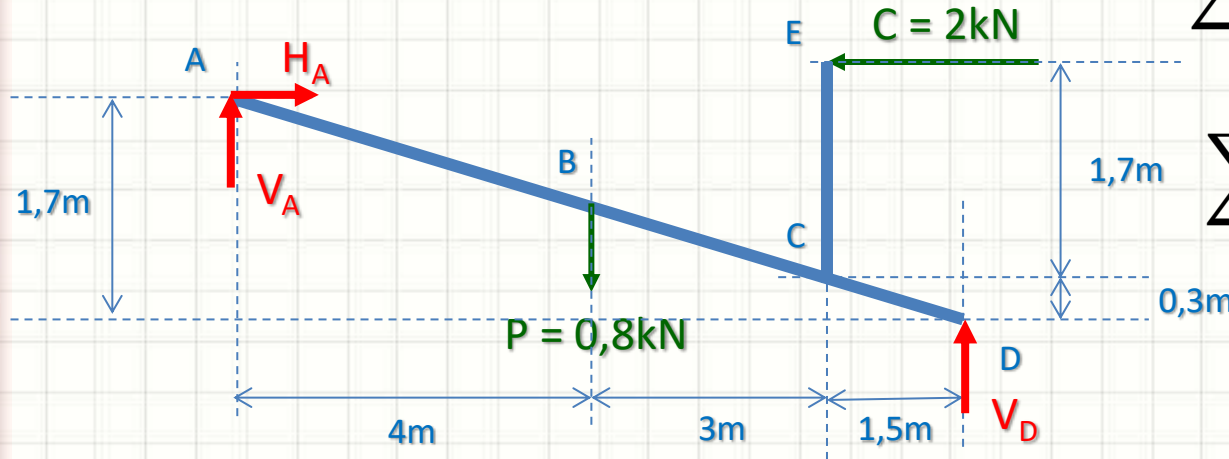
$$\Rightarrow H_A = 2\text{kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow +V_A + V_D - P = 0$$

$$\Rightarrow +V_A + V_D = 800$$

$$\Rightarrow V_A = 800 - V_D$$



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow (P \cdot 4) - (C \cdot 0,3) - (V_D \cdot 8,5) = 0 \Rightarrow 8,5 \cdot V_D = 2600$$

$$\Rightarrow V_D \cong 305,88 \cong 0,3\text{kN}$$

$$\therefore V_A \cong 0,5\text{kN}$$

# Exercício 4



- Em um píer, um porteiner está carregado para abastecer um navio, sofrendo esforço do vento, ao mesmo tempo que o navio encosta no pier gerando um esforço horizontal. Calcule as reações de apoio:

