



# **MECÂNICA DOS SÓLIDOS**

## **VIGAS**

### **PARTE II**

Prof. Dr. Daniel Caetano

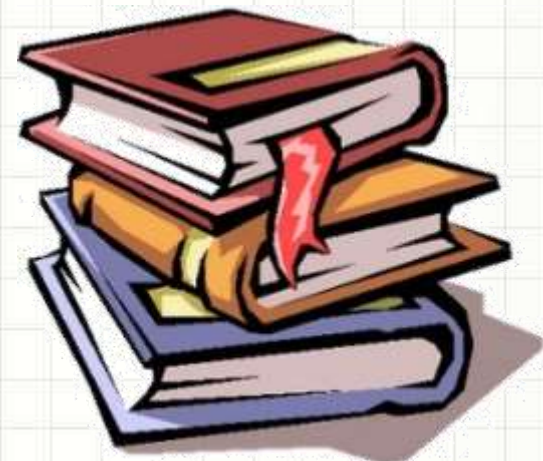
2019 - 2

# Objetivos

- Conceituar cargas distribuídas e sistemas mecanicamente equivalentes
- Compreender uma das técnicas para cálculos com cargas distribuídas
- Compreender o traçado de diagramas de cortante e momentos fletores
- **Atividade Aula 7 – SAVA!**
- **Pré-Aula 08 – SAVA**



# Material de Estudo



---

## Material

## Acesso ao Material

Apresentação

<http://www.caetano.eng.br/>  
(Mecânica dos Sólidos – Aula 7)

Material Didático

Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 5 (SAVA)

Minha Biblioteca

Estática e Mecânica dos Materiais (BERR;JOHNSTON),  
Cap. 11, 12 e 13

Biblioteca Virtual

Resistência dos Materiais (Hibbeler, 7ª, pgs 181-201)

---

**LEMBRETE: CONSULTAR O “ANTES” DA AULA 8 NO SAVA!**

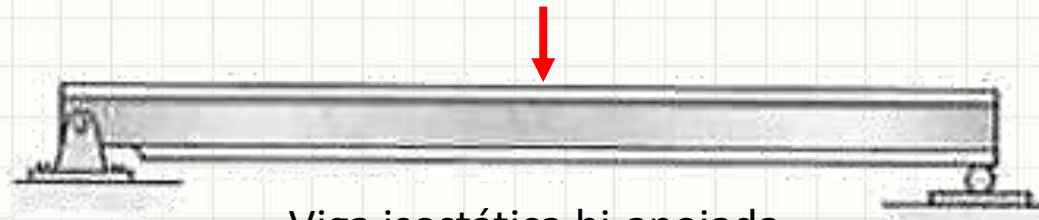


RETOMANDO:

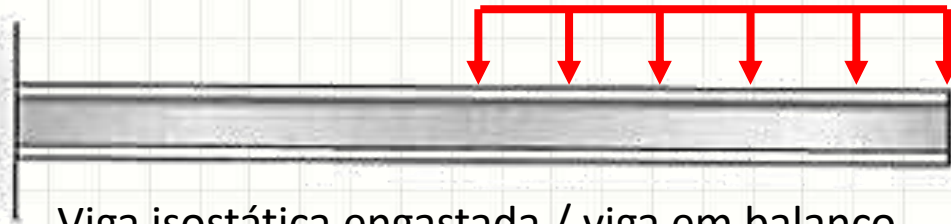
# AS VIGAS

# Objeto de Estudo

- Vigas – Cargas perpendiculares ao eixo



Viga isostática bi-apoiada



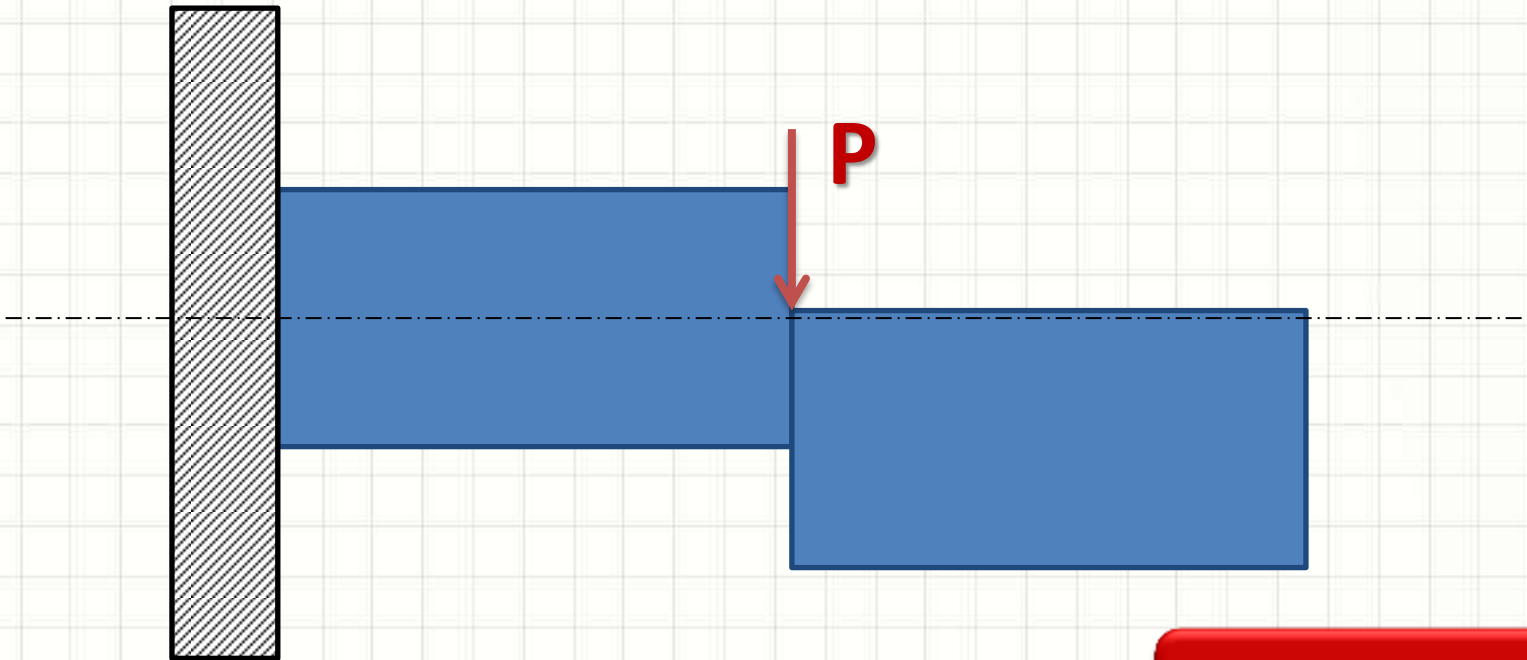
Viga isostática engastada / viga em balanço



Viga isostática bi-apoiada com extremidade em balanço

# Força Cortante

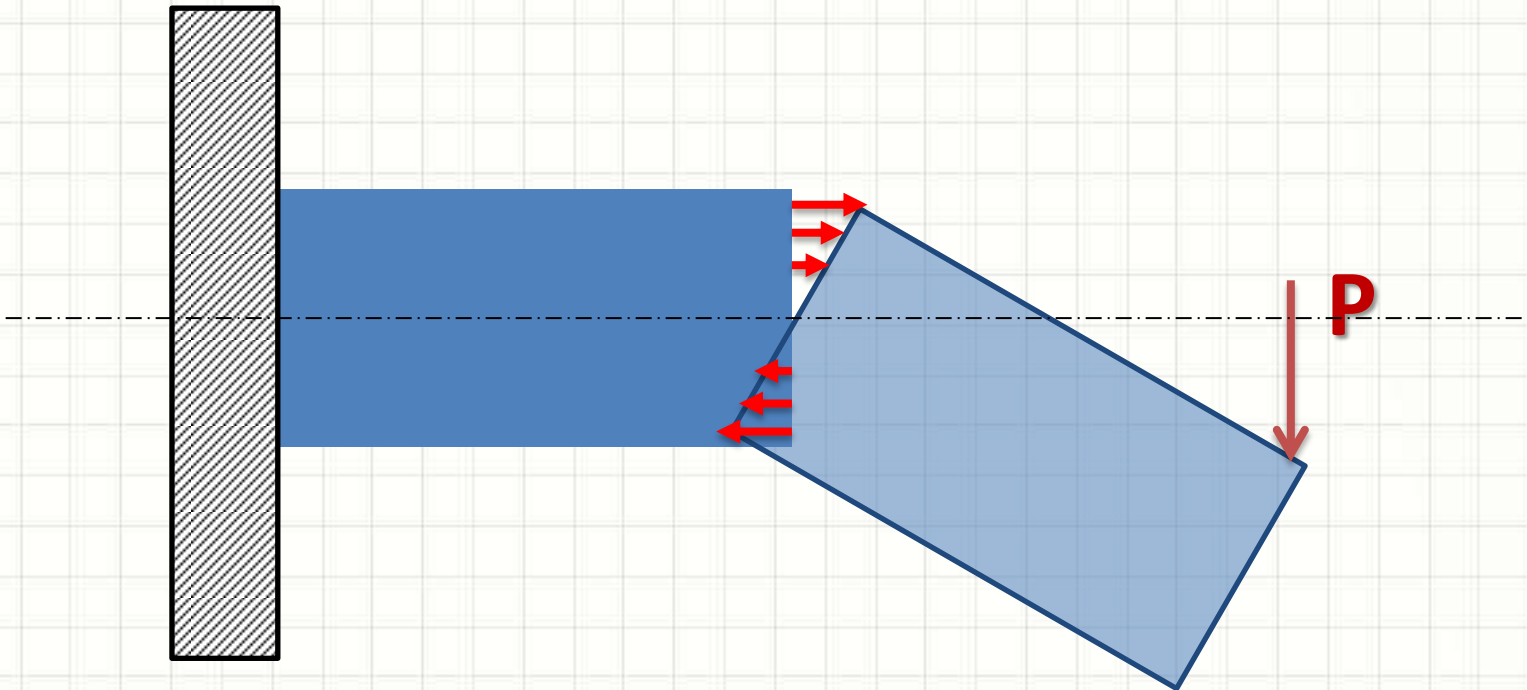
- Força Cortante: aquela que tende a “fatiar”
  - É perpendicular ao eixo da barra



Só isso?

# Momento Fletor

- Momento Fletor: esforço que “enverga” barra
  - Resulta das forças cortantes



# Diagramas de Esforços Cortantes

- Por que traçar diagrama de cortante?
  - Cortante pode variar ao longo do comprimento
  - Encontrar o ponto de maior sollicitação

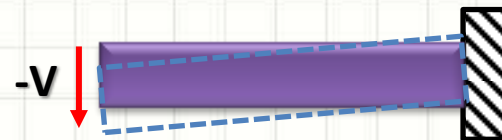
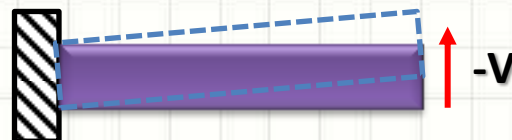
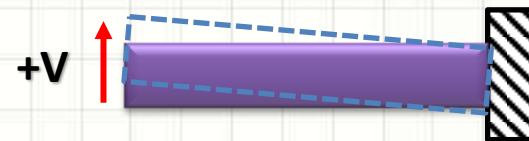
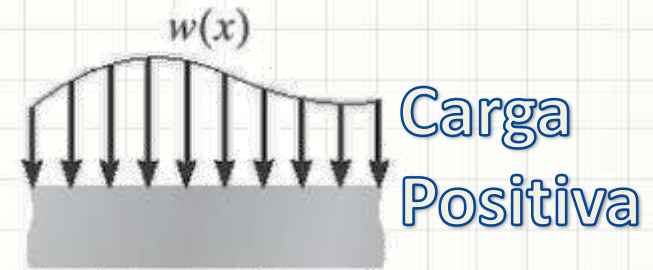
- Convenção de Sinais

- Carregamento

- De cima para baixo: +
    - De baixo para cima: -

- Cortante

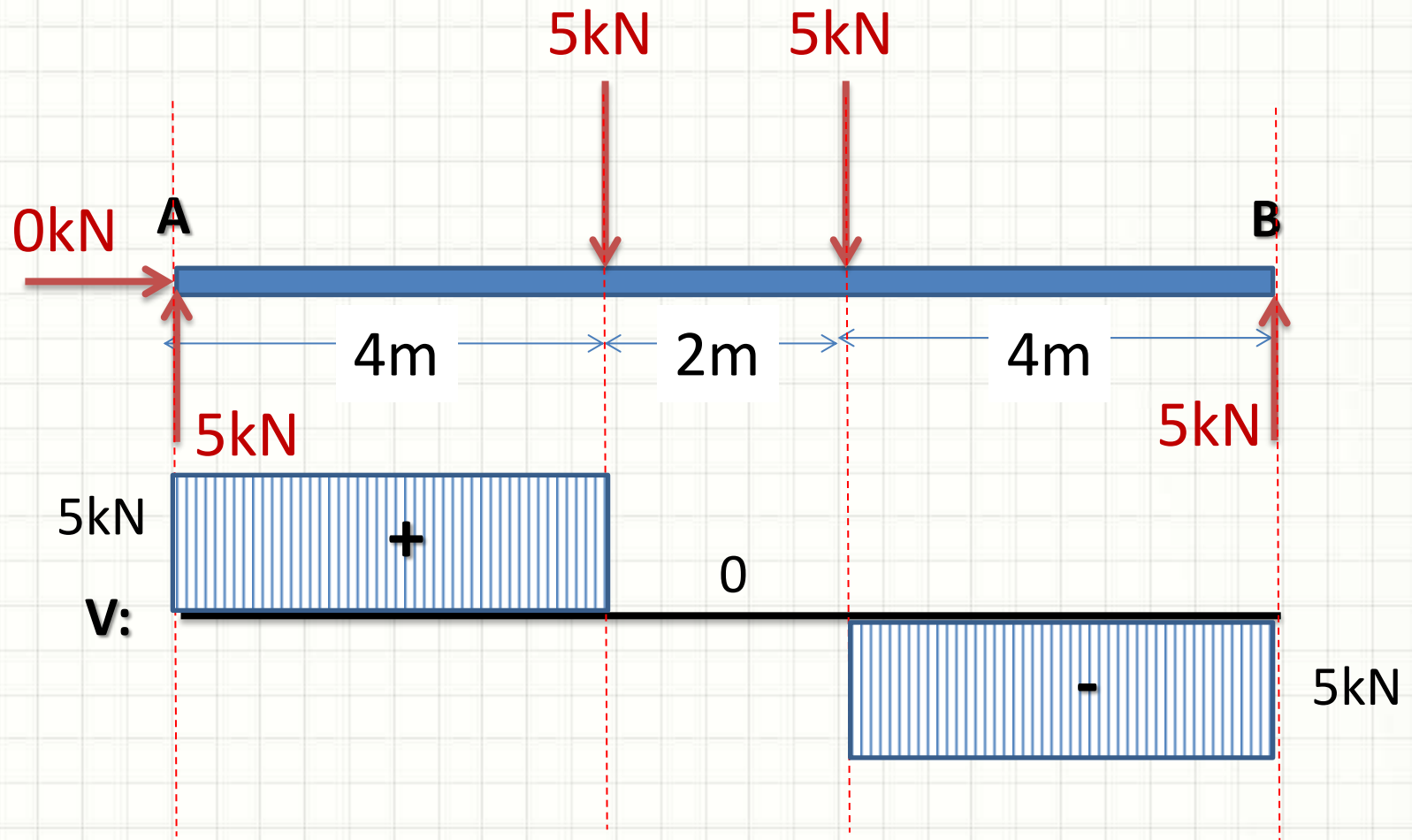
- Gira sent. Horário: +
    - Gira sent. Anti-Horário: -





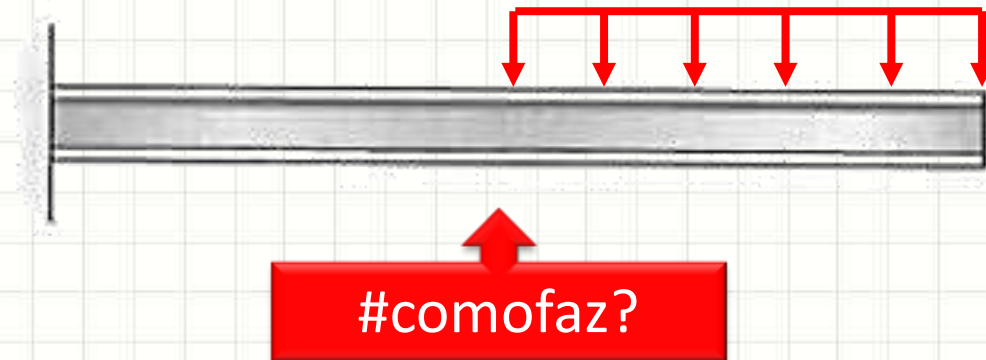
# Exemplo: Diagrama de Esf. Cortantes

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



# Diagramas de Esforços Cortantes

- E se as forças forem uma carga distribuída?
  - Ex.: enchimento de uma laje rebaixada



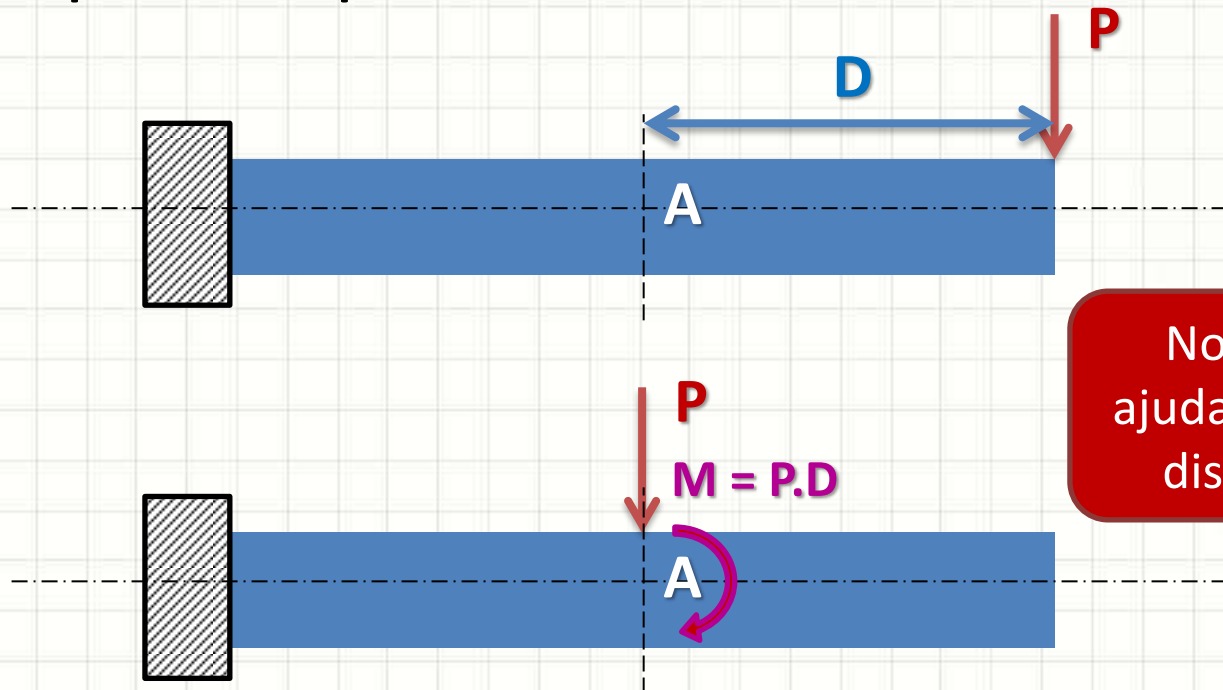


TEOREMA DO CORTE:

# **SISTEMAS DE FORÇAS MECANICAMENTE EQUIVALENTES**

# Sistemas de Forças ME

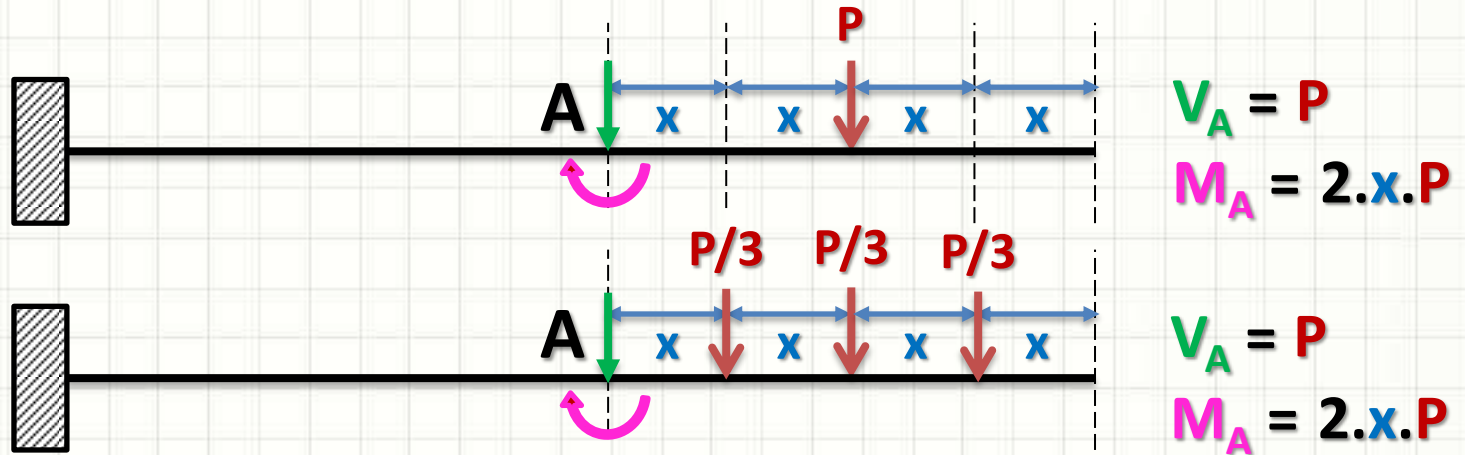
- Quando, para seção transversal específica:
  - Configurações de forças diferentes...
  - Esforços solicitantes iguais
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



No que isso ajuda para carga distribuída?

# Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



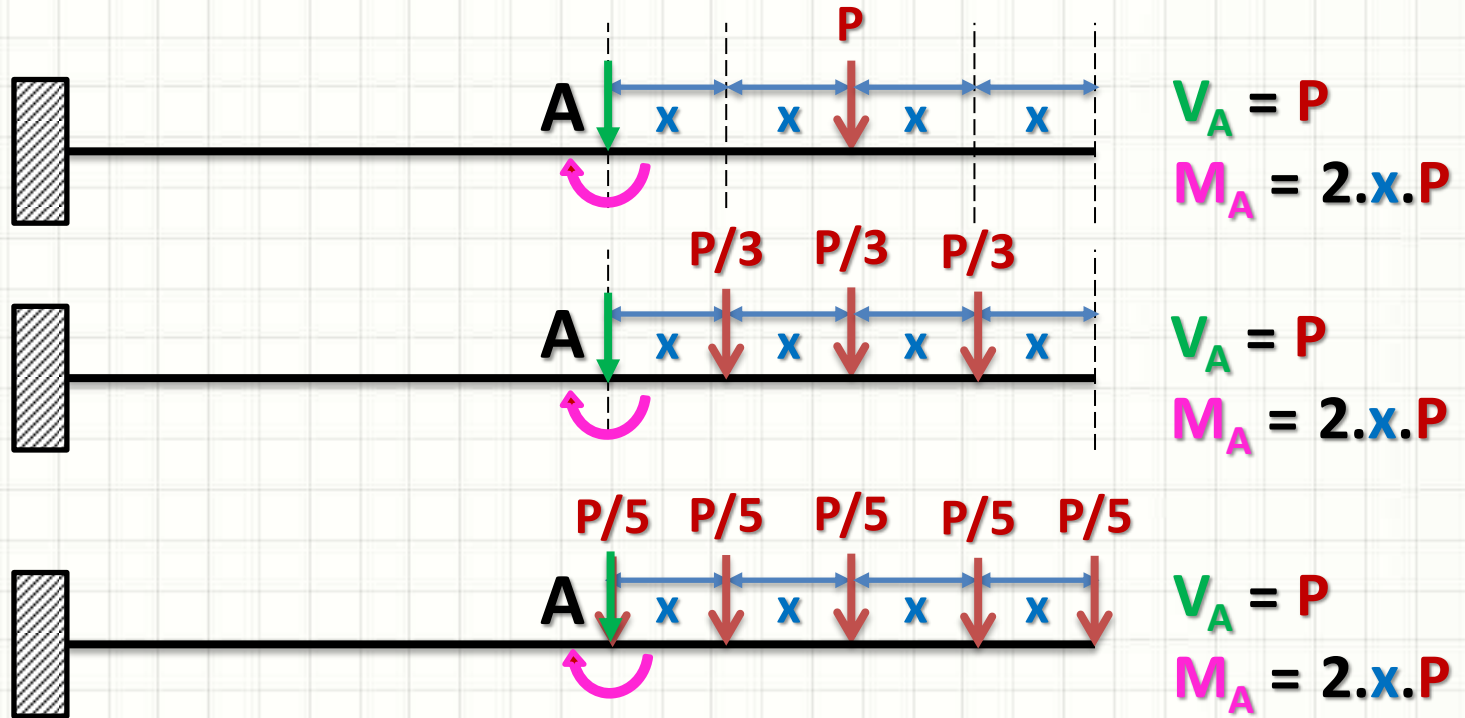
$$V_A = 3 \cdot \frac{P}{3}$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{3} \cdot 6 \cdot x$$

# Sistemas de Forças ME

- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



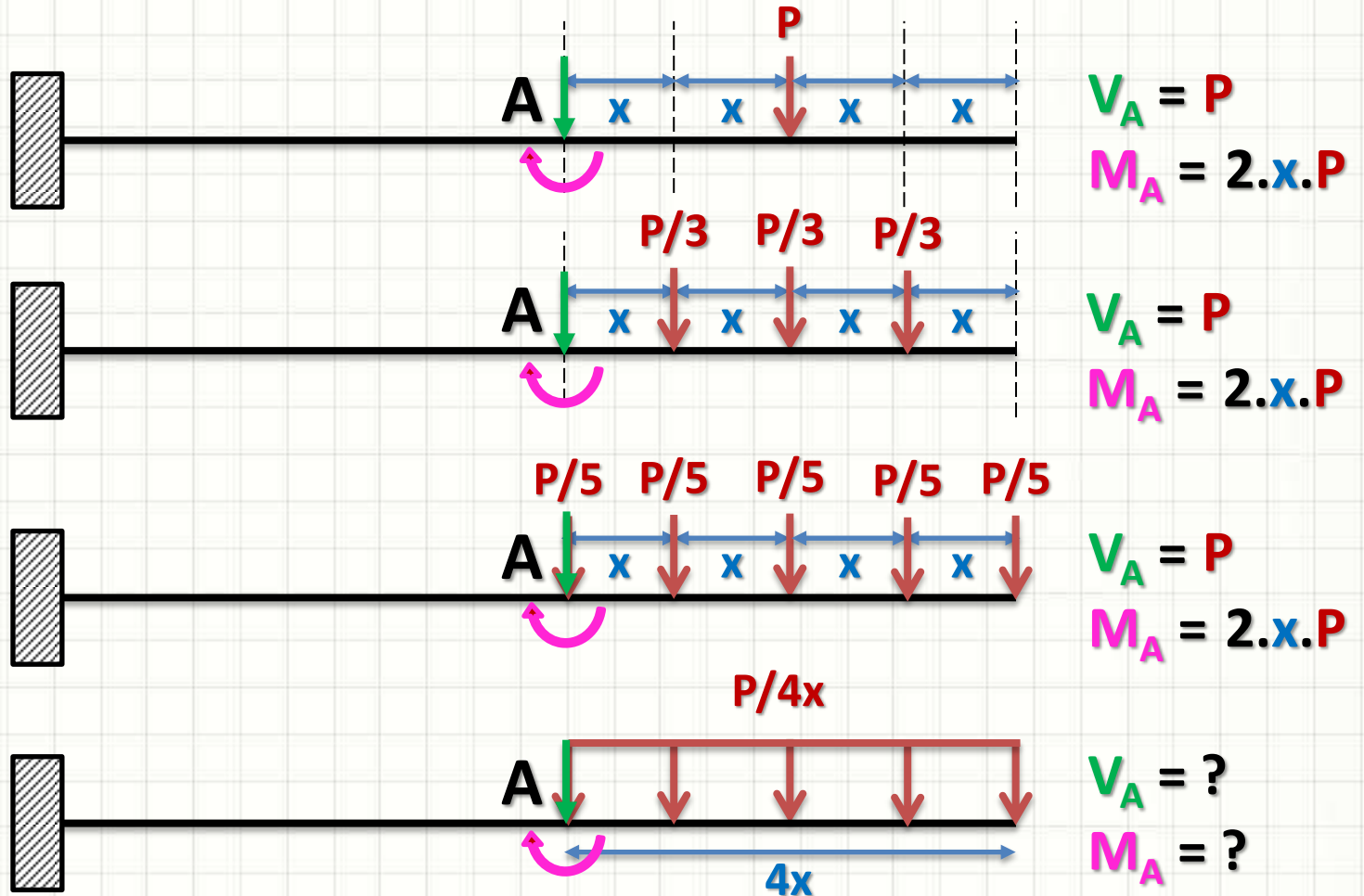
$$V_A = 5 \cdot \frac{P}{5}$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 0 + \frac{P}{5} \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 2 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 3 \cdot x + \frac{P}{3} \cdot 4 \cdot x$$

$$M_A = \frac{P}{5} \cdot 10 \cdot x$$

# Sistemas de Forças ME

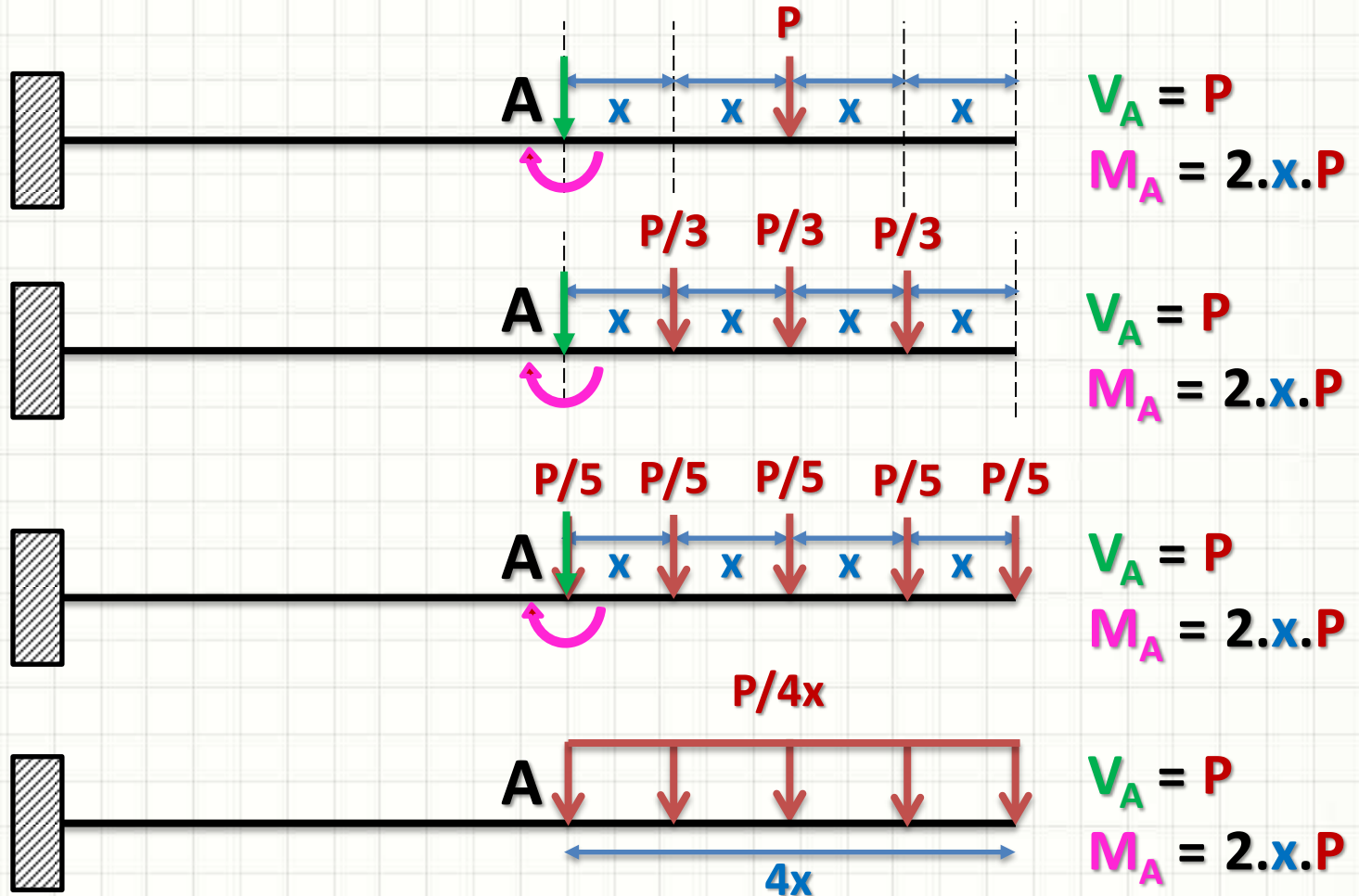
- Exemplo: Do ponto de vista de **A**



Sist

É como se a carga total estivesse no C.G. da carga distribuída!

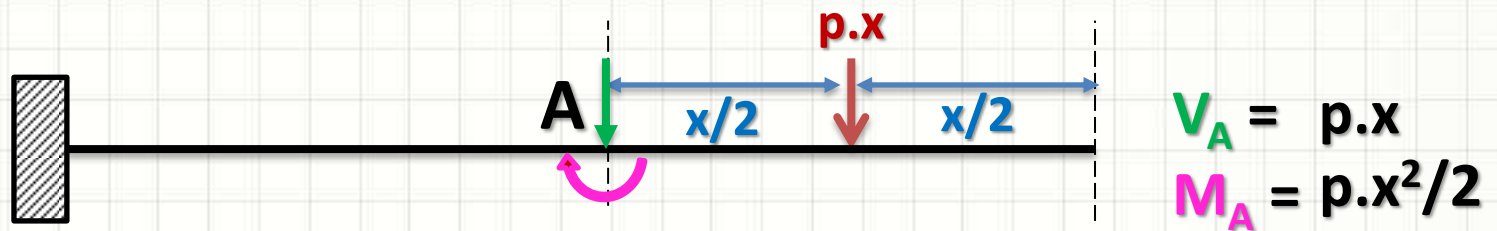
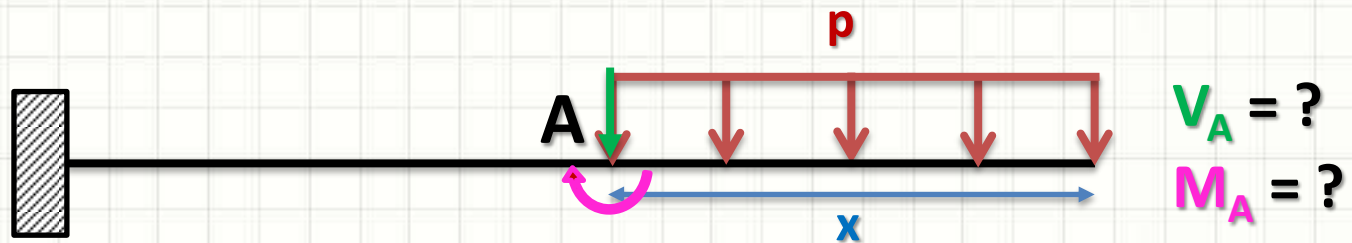
- Exemplo: Do ponto de vista de A





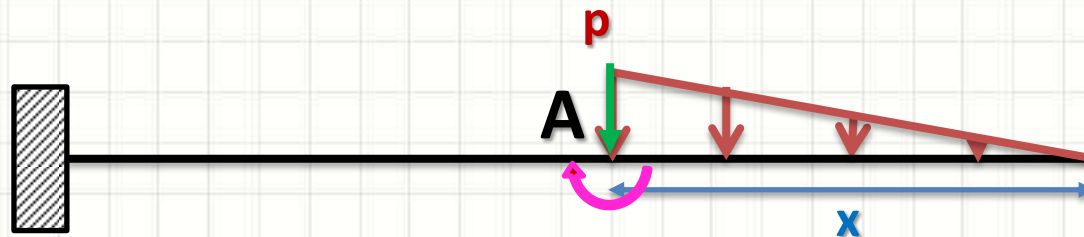
# Sistemas de Forças ME

- Ou seja: Do ponto de vista de **A**

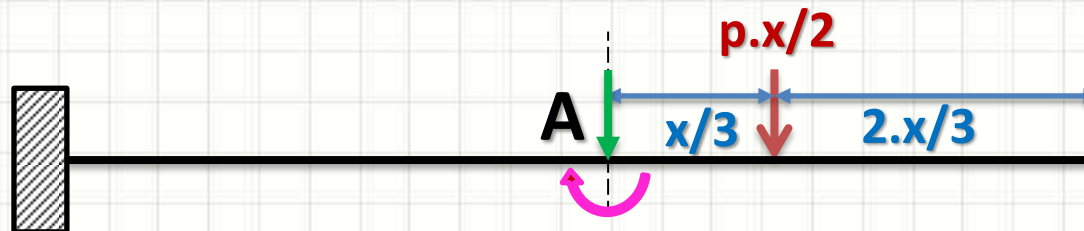


# Sistemas de Forças ME


- Sempre no meio?
  - Não!
  - No C.G. da “área” da carga distribuída!



$$V_A = ?$$
$$M_A = ?$$



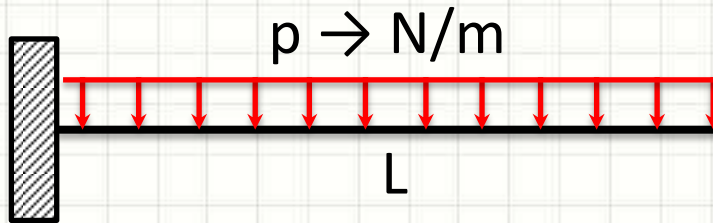
$$V_A = p \cdot x / 2$$
$$M_A = p \cdot x^2 / 6$$



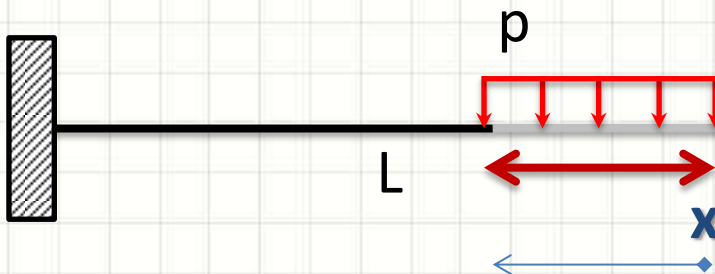
**DIAGRAMAS DE  
ESFORÇOS CORTANTES  
EM CARGAS DISTRIBUÍDAS**

# Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída

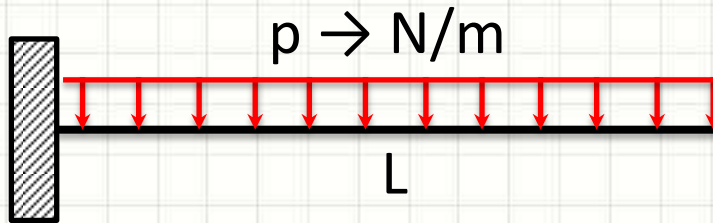


- Qual a força cortante em um ponto “x”?

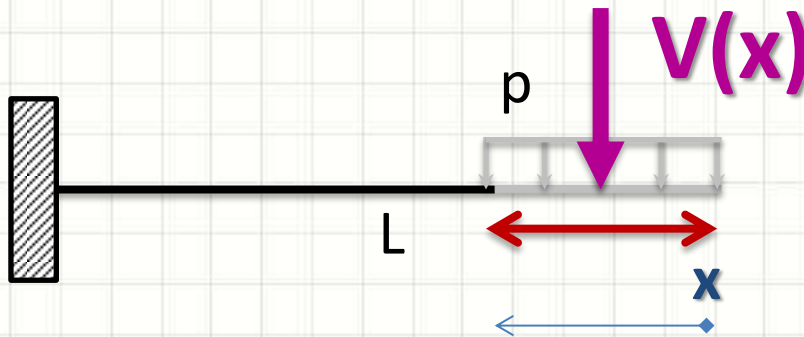


# Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante em um ponto “x”?



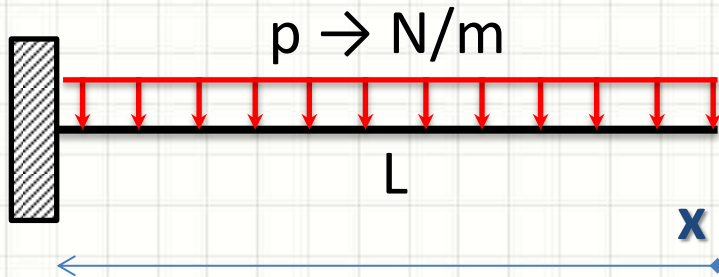
**x**

$$V(x) = p \cdot x$$

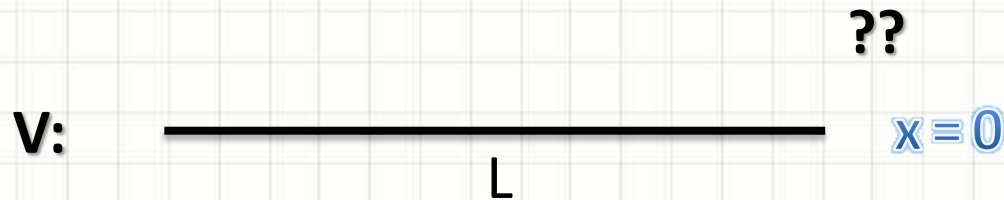
- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!

# Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída

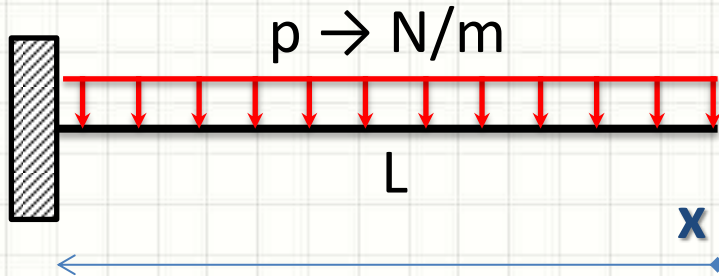


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

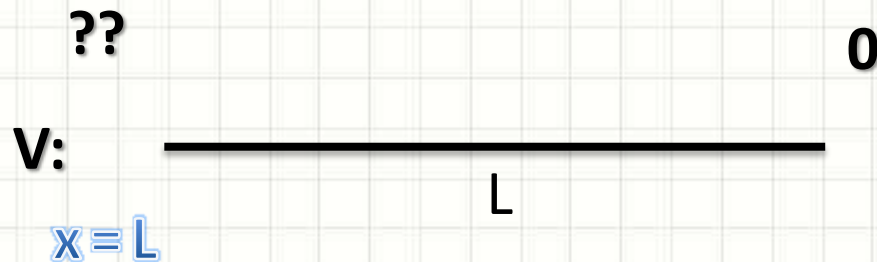


# Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída

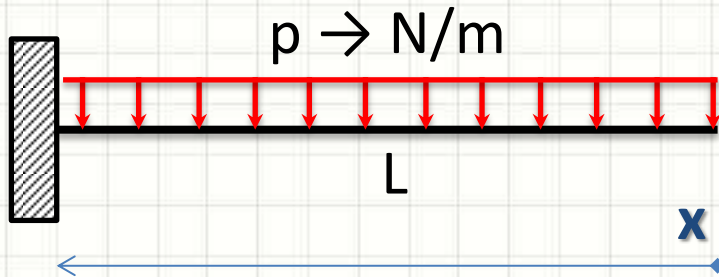


- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...

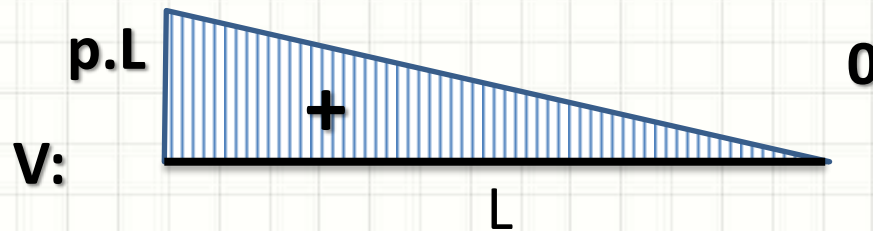


# Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Distribuída



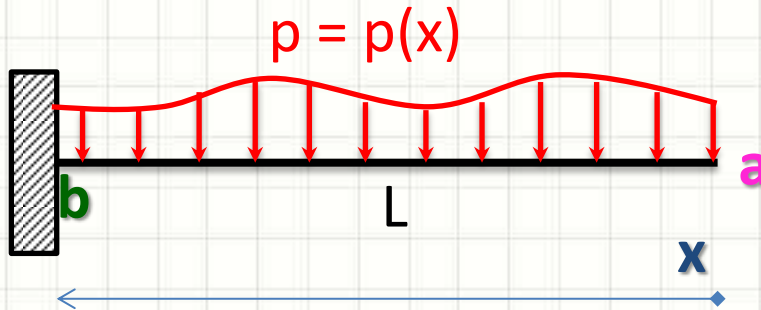
- $V(x) = p \cdot x \rightarrow$  sentido horário!
- Logo... O diagrama de cortante é...





# Diagrama de Esforços Cortantes

- Força Cortante Genérica Distribuída

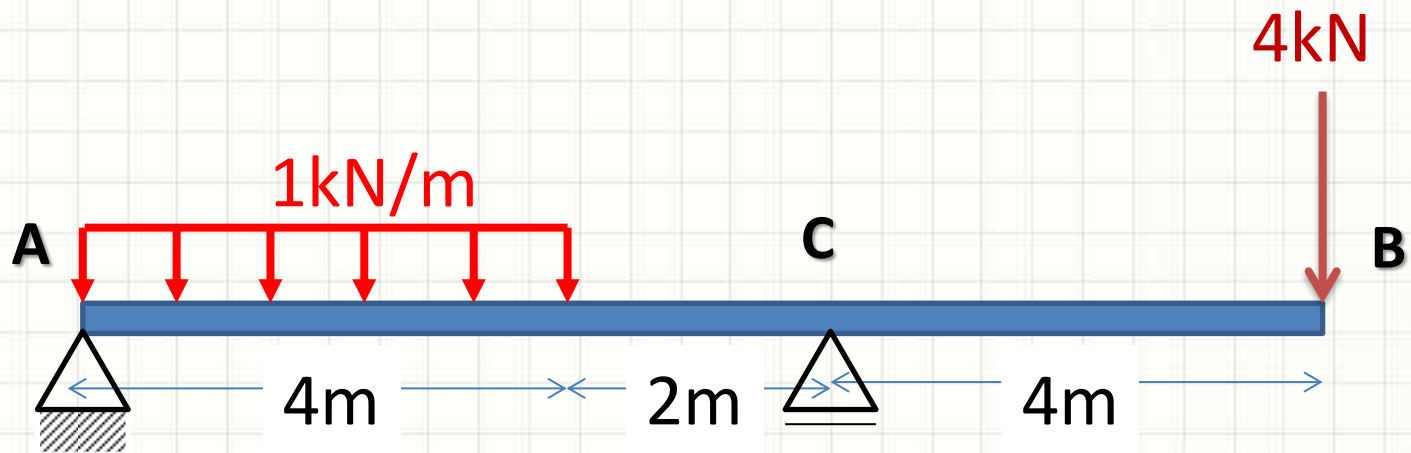


- Qual a força cortante de  $a$  até  $b$ ?

$$V = \int_a^b p(x) \cdot dx$$

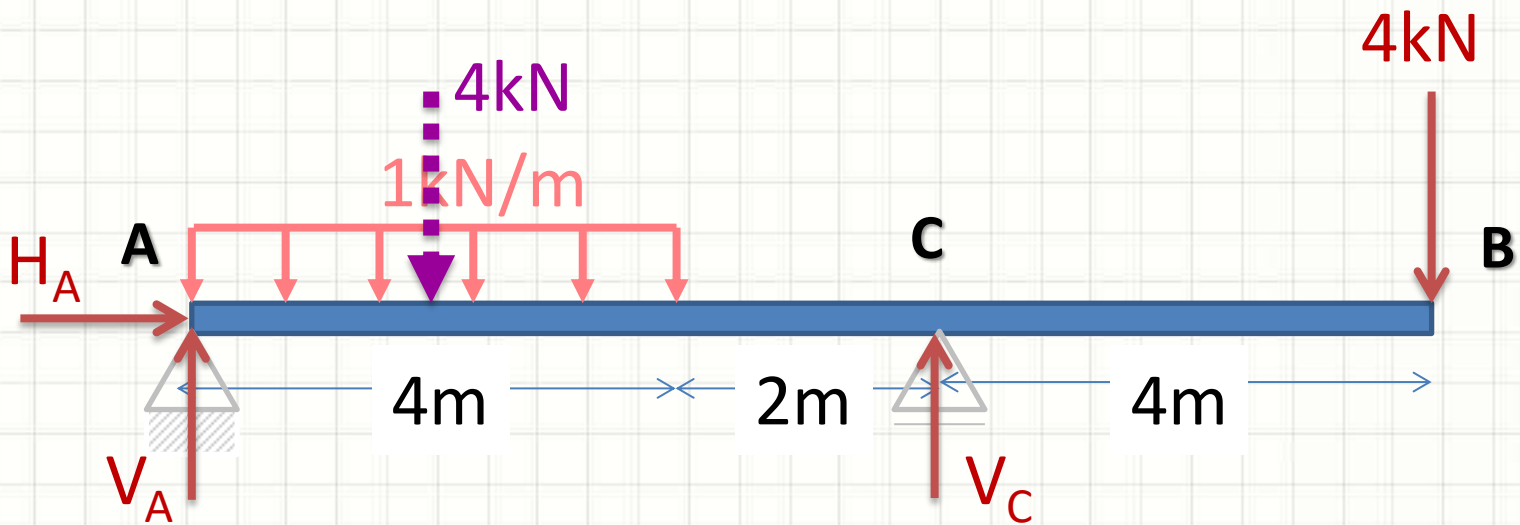
# Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



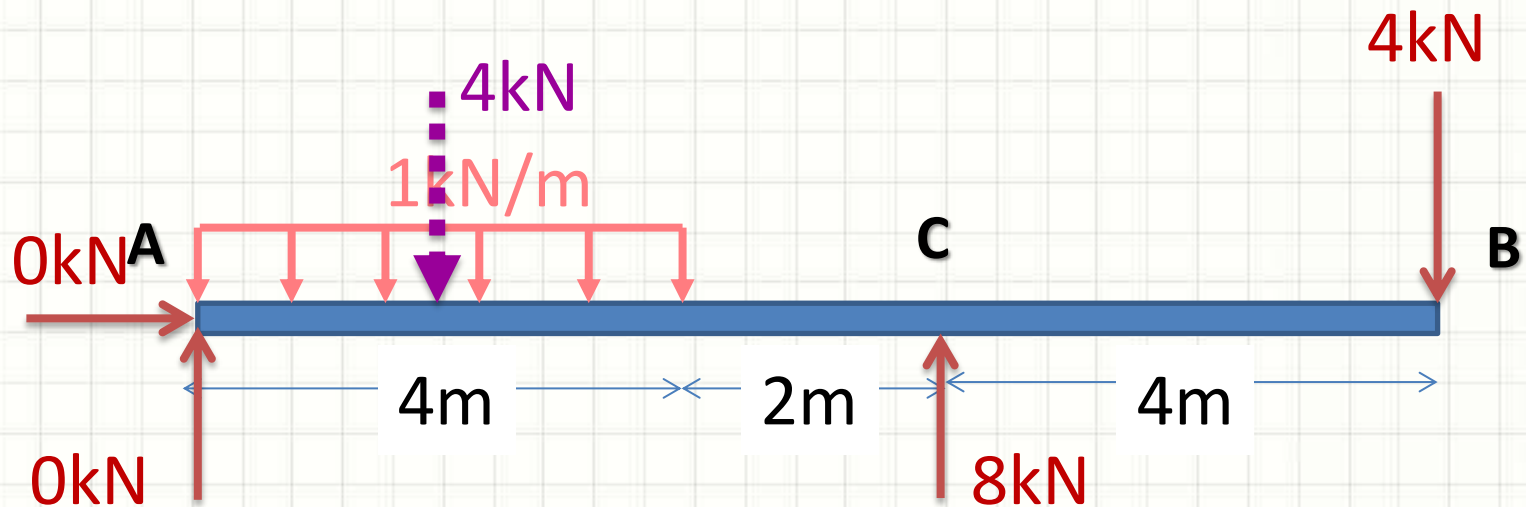
# Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



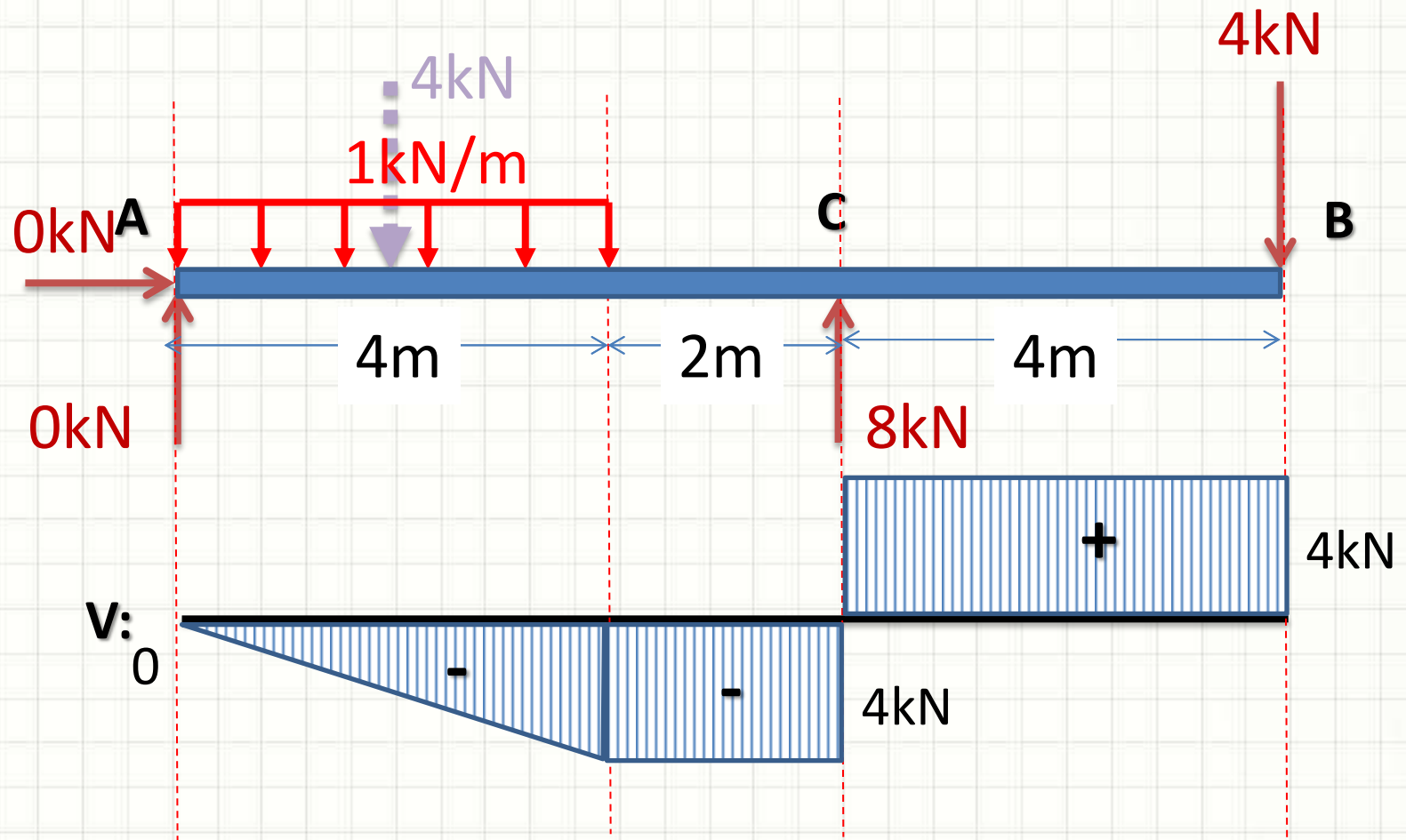
# Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



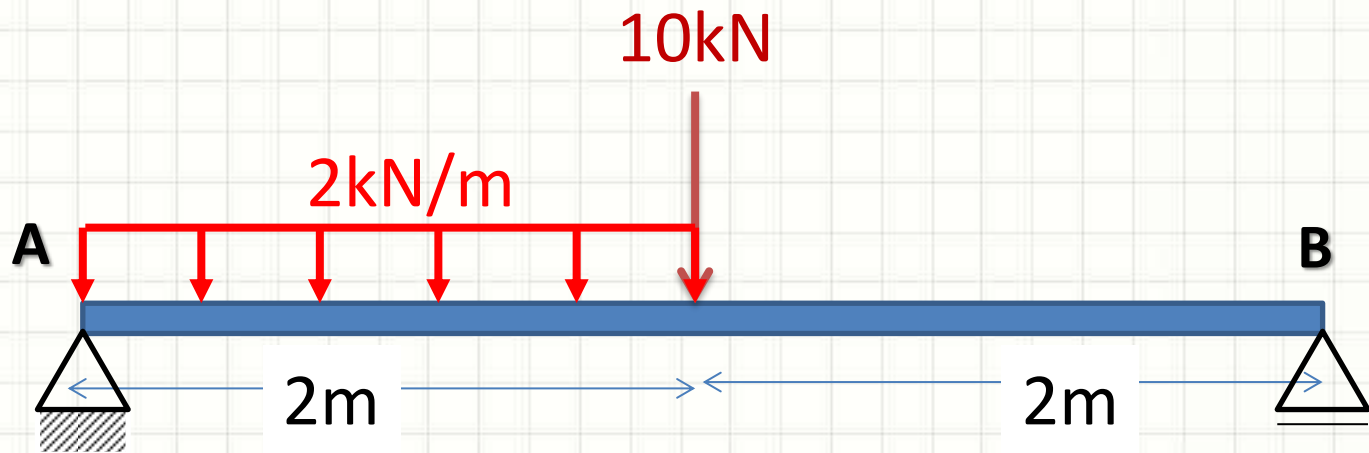
# Exemplo

- Trace o Diagrama de Cortante para a viga:



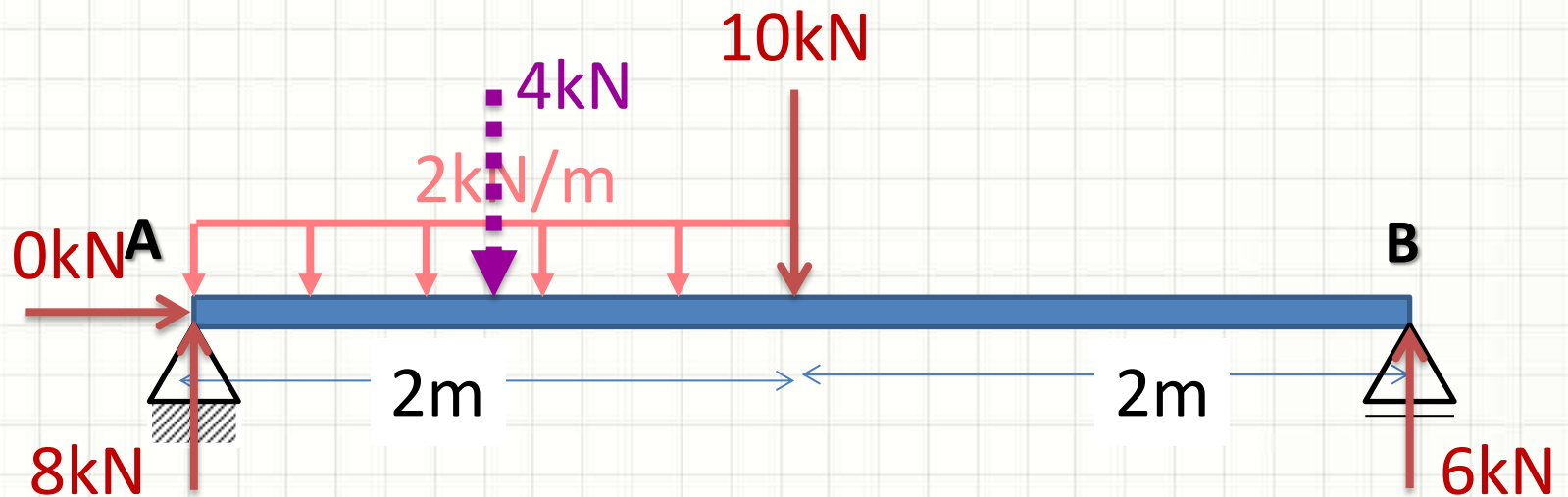
# Exercício

- Trace o Diagrama de Cortante:



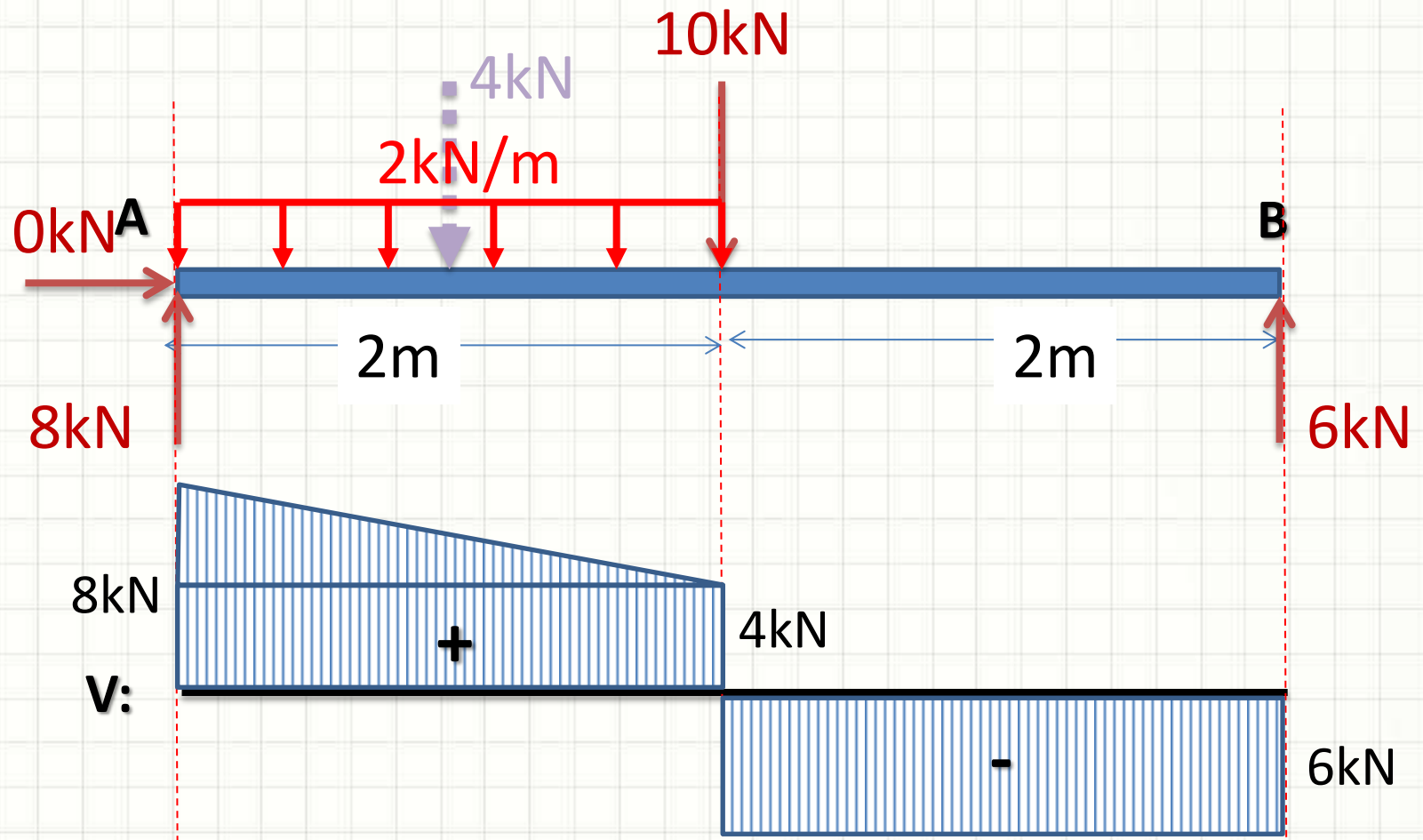
# Exercício

- Trace o Diagrama de Cortante:



# Exercício

- Trace o Diagrama de Cortante:





The background features a light gray grid pattern. A thick, dark red curved line starts from the left edge and arches across the top of the page. Below this line, a dashed red line follows a similar curved path. The text is positioned in the lower right quadrant of the grid.

# **DIAGRAMAS DE MOMENTO FLETOR**

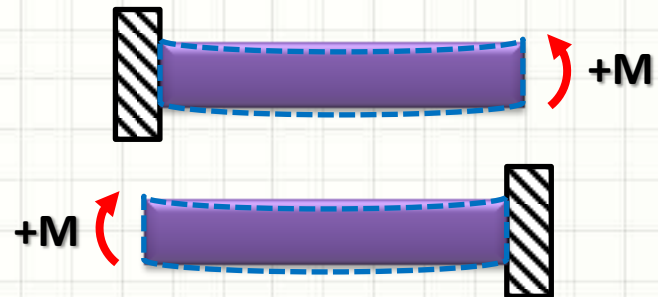
# Diagramas de Momentos Fletores

- Por que traçar diagramas de momento?
  - Momento usualmente varia ao longo da viga
  - Encontrar o ponto de maior sollicitação

- Convenção de Sinais

- Momento Positivo

- Traciona parte inferior



- Momento Negativo

- Traciona parte superior



# Convenção de Sinal em Diagramas

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Determinação do Equilíbrio Estático
  - Direções positivas são **arbitrárias**



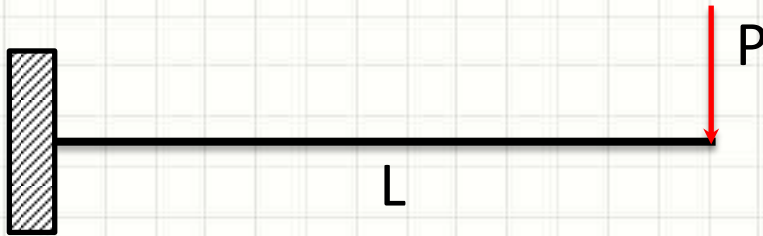
# Convenções de Sinal em Diagramas

- ATENÇÃO! Não confunda as convenções!
- Traçado de Diagramas
  - Direções positivas são **convencionadas**

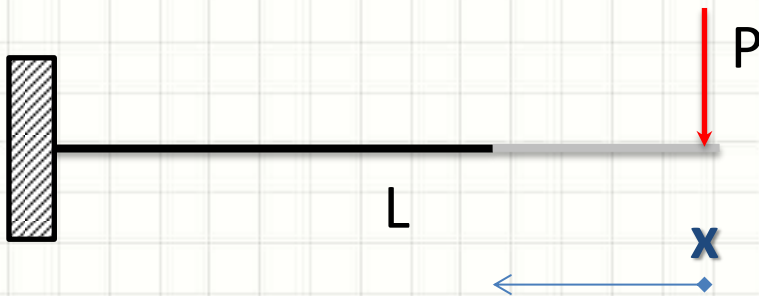
Grandeza	+	-
Força Normal	Força saindo da barra (tração)	Força entrando na barra (compr.)
Carga	Para baixo	Para cima
Força Cortante	Gira barra no sentido horário	Gira barra no sentido anti-horário
Momento Fletor	Traciona em baixo	Traciona em cima
Momento Torçor	Torque saindo da barra	Torque entrando na barra

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “ $x$ ”?

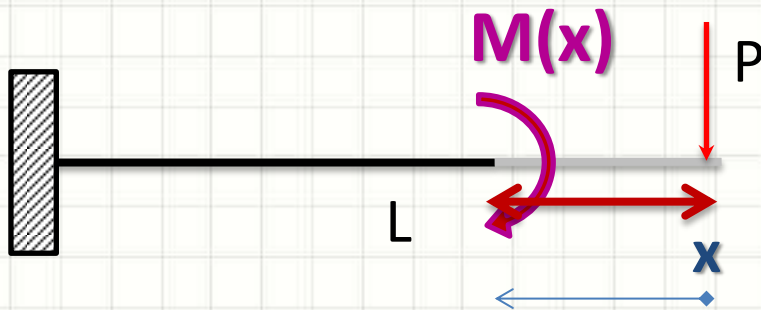


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- Qual o momento em um ponto “ $x$ ”?



$x$

O sinal vem do fato que traciona em cima!

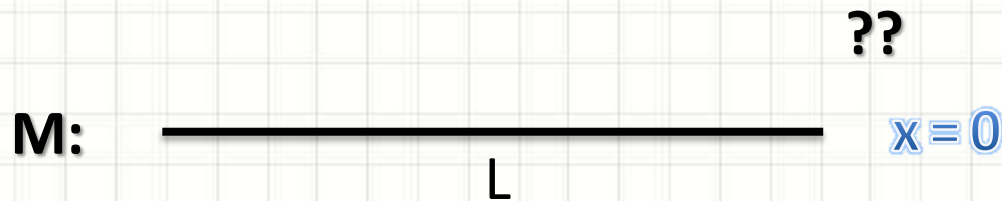
$$M(x) = -P \cdot x$$

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada



- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...

??

0

M:



$x = L$

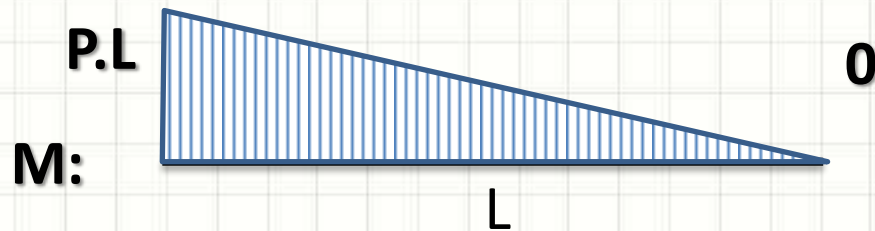


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Concentrada

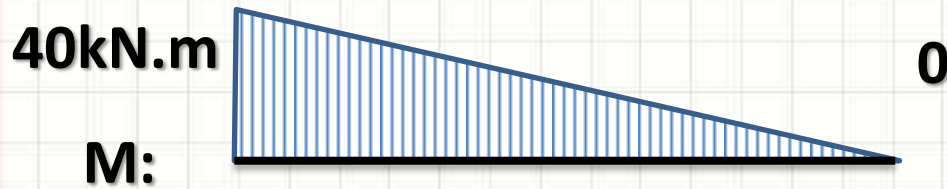
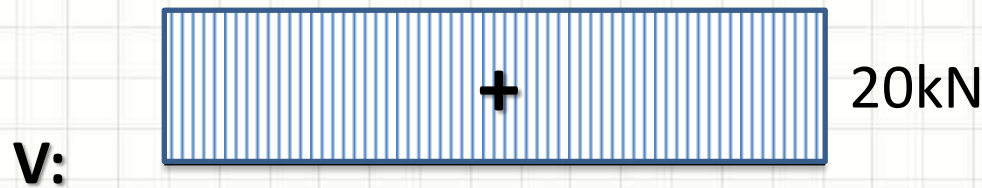
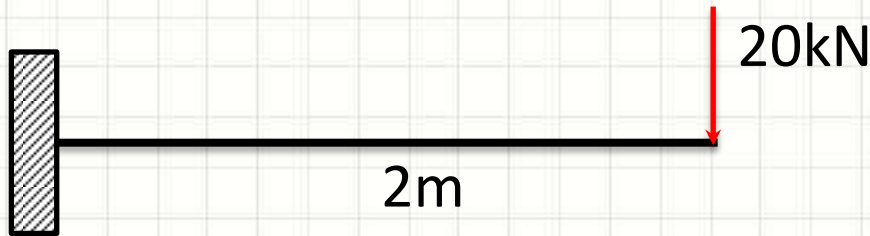


- $M(x) = -P \cdot x \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor...



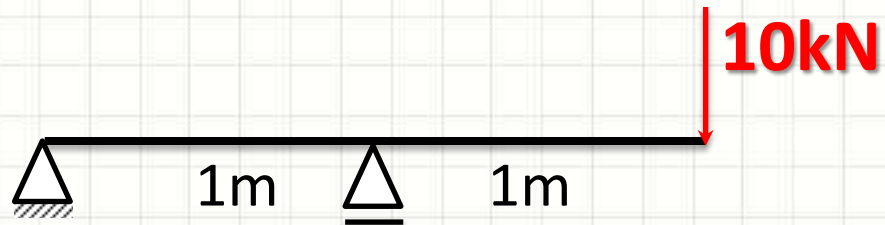
# Diagramas de Cortante e Momento

- Força Cortante Concentrada



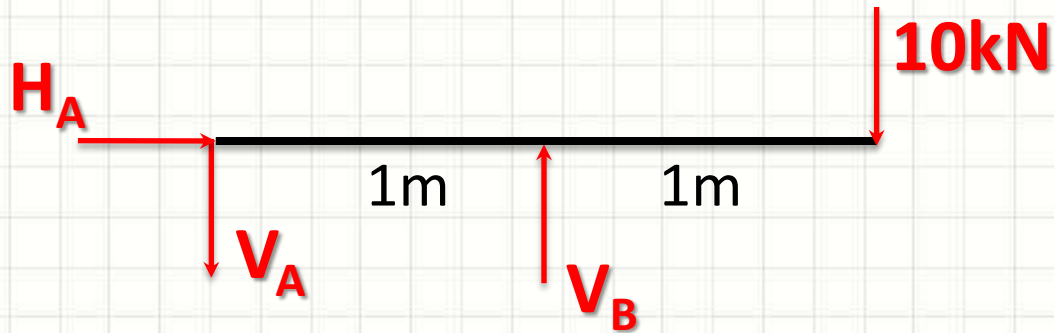
# Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



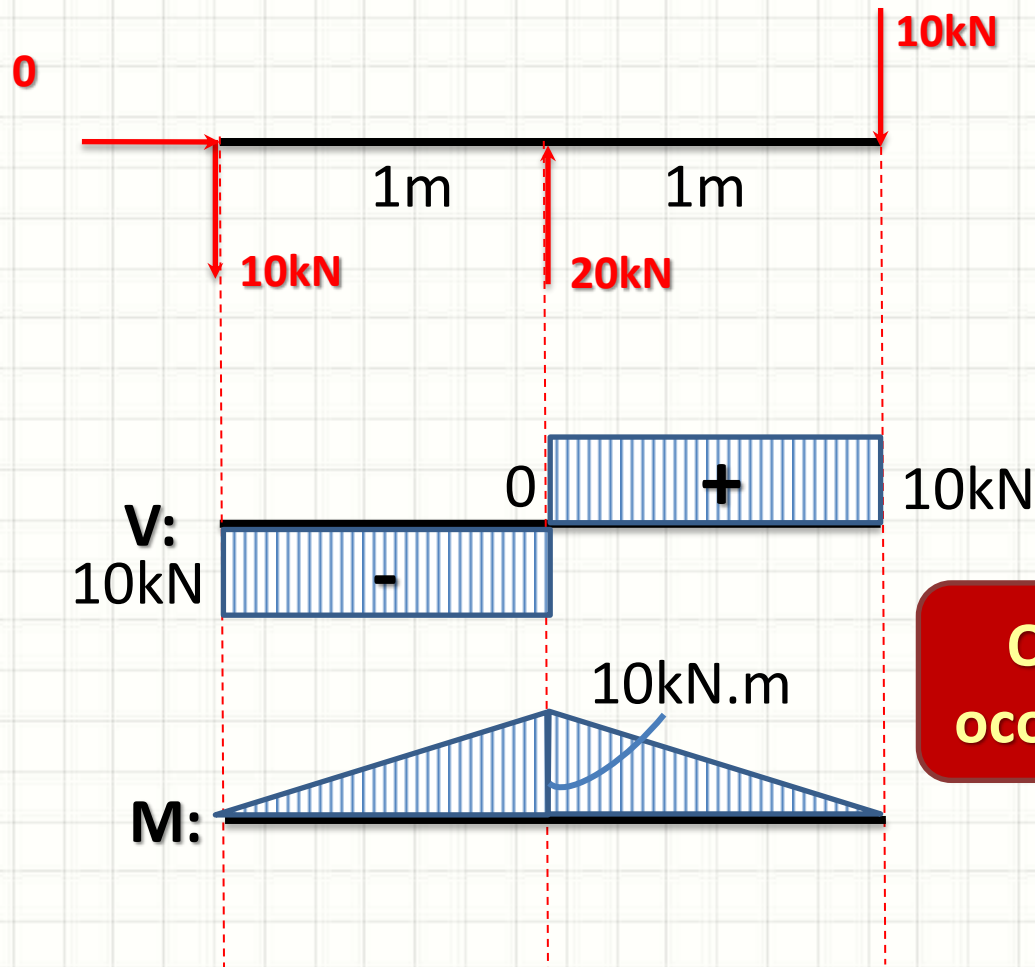
# Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



# Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



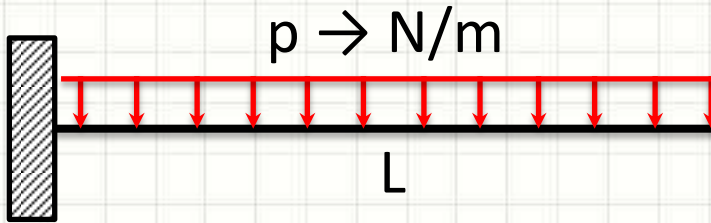
**Observe:  $M_{\text{máx}}$  ocorre onde  $V = 0$ !**



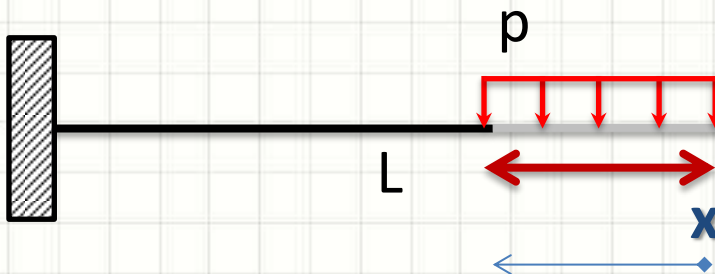
**DIAGRAMAS DE  
MOMENTOS FLETORES  
EM CARGA DISTRIBUÍDA**

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

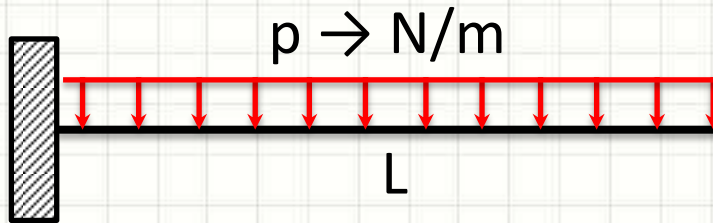


- Qual a força cortante total em “x”?

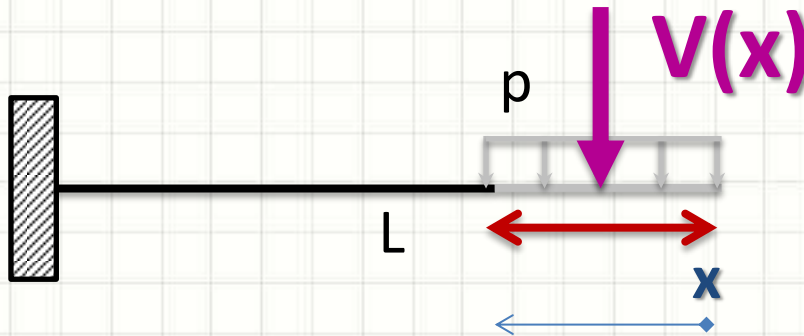


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- Qual a força cortante total em “x”?



$x$

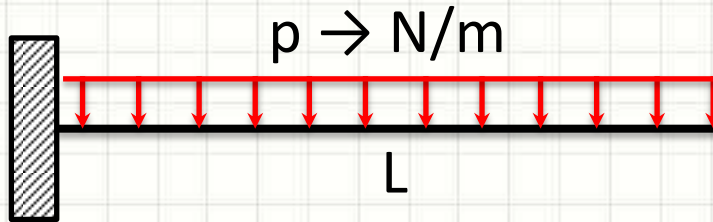
$$V(x) = p \cdot x$$

- Mas e o momento em “x”?

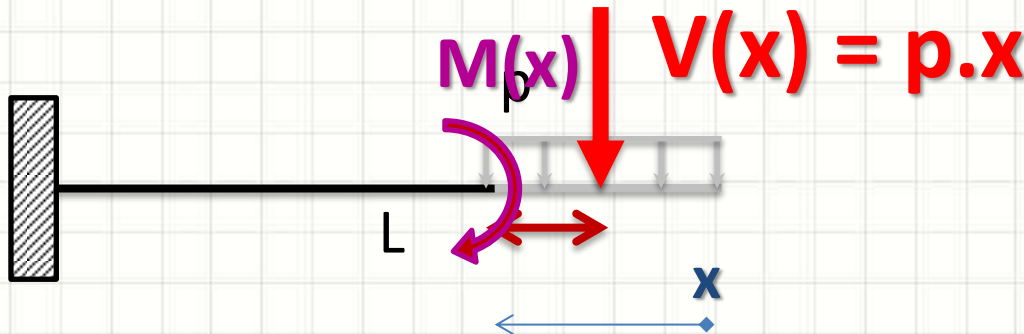


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

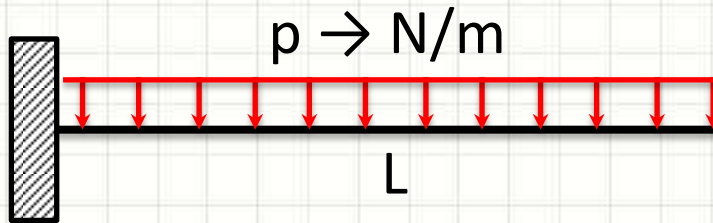


- Qual o momento em um ponto “x”?

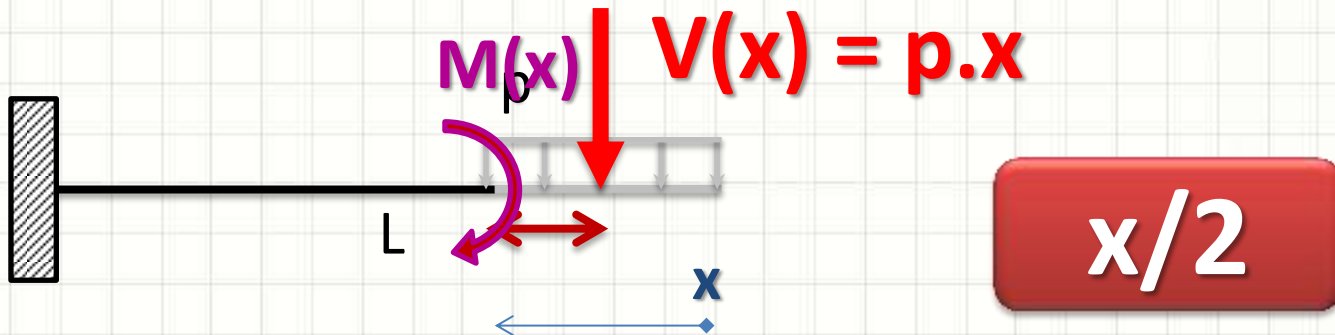


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



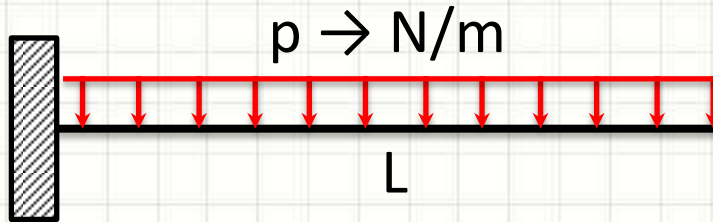
- Qual o momento em um ponto “x”?



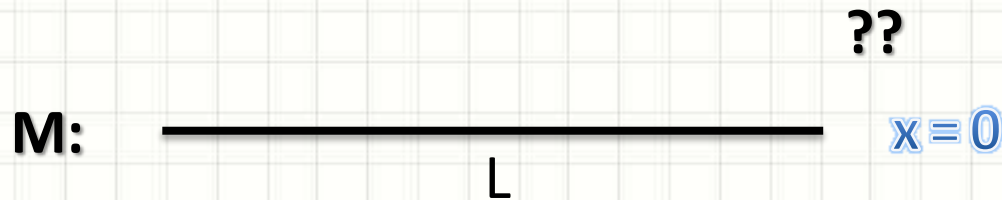
$$M(x) = -(p \cdot x \cdot x/2)$$

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

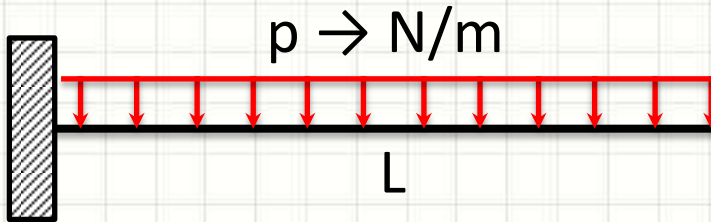


- $M(x) = - ( p \cdot x^2 / 2 ) \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...



# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - ( p \cdot x^2 / 2 ) \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

??

0

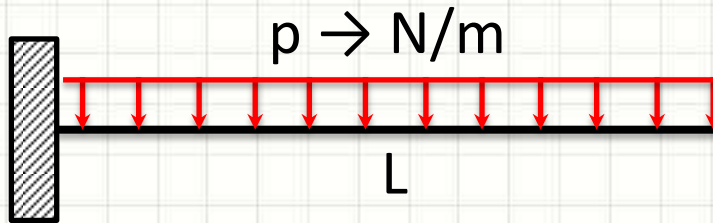
M:



$x = L$

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída

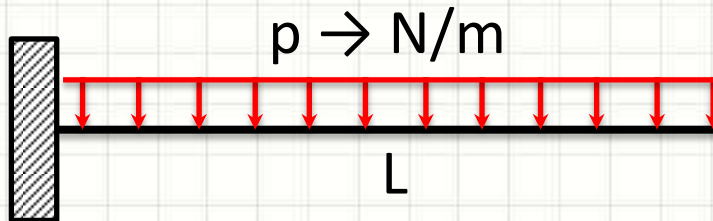


- $M(x) = - ( p \cdot x^2 / 2 ) \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

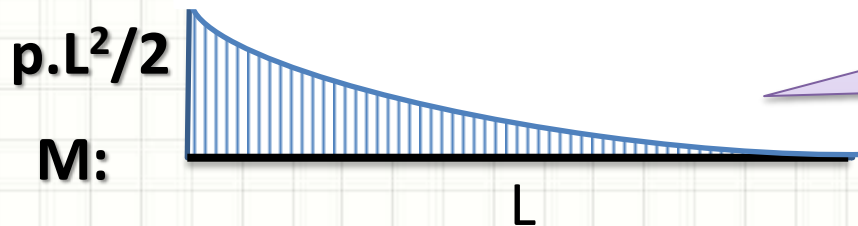


# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Distribuída



- $M(x) = - ( p \cdot x^2 / 2 ) \rightarrow$  traciona em cima!
- Logo... O diagrama de momento fletor é...

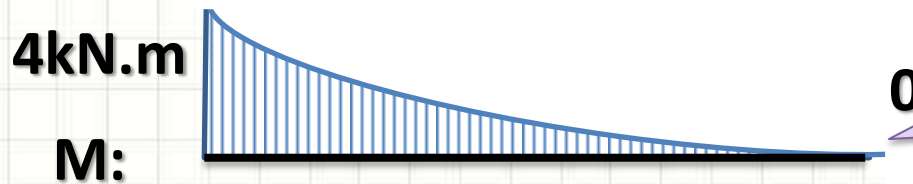
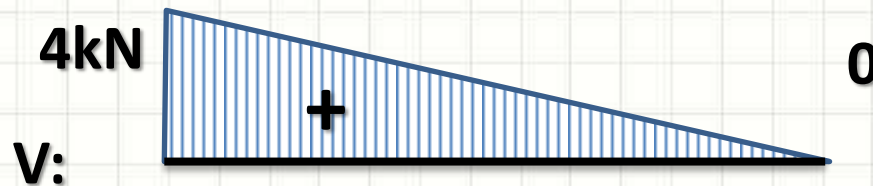
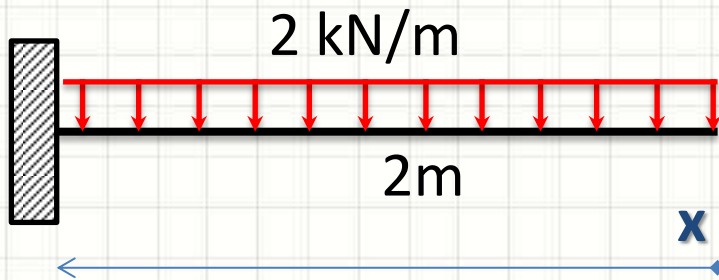


“Boca para cima”  
porque o sinal de  
 $x^2$  é positivo!

**Regra da Corda**

# Diagrama de Momento Fletor

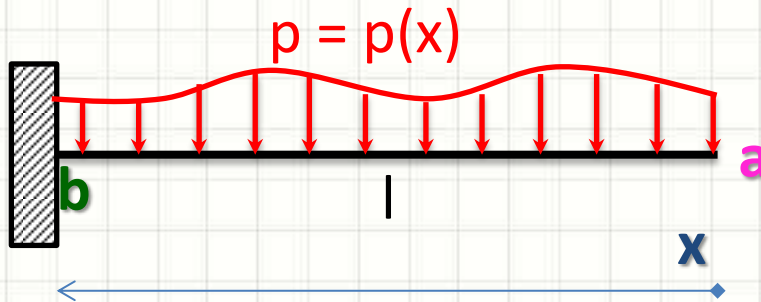
- Força Cortante Distribuída



Observe como a cortante crescente "acelera" o momento

# Diagrama de Momento Fletor

- Força Cortante Genérica Distribuída



- Qual o momento de  $a$  até  $b$ ?

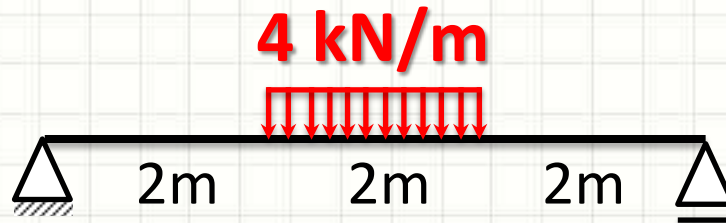
$$M = \int_a^b V(x) \cdot dx$$

- Cuidado com o sinal!



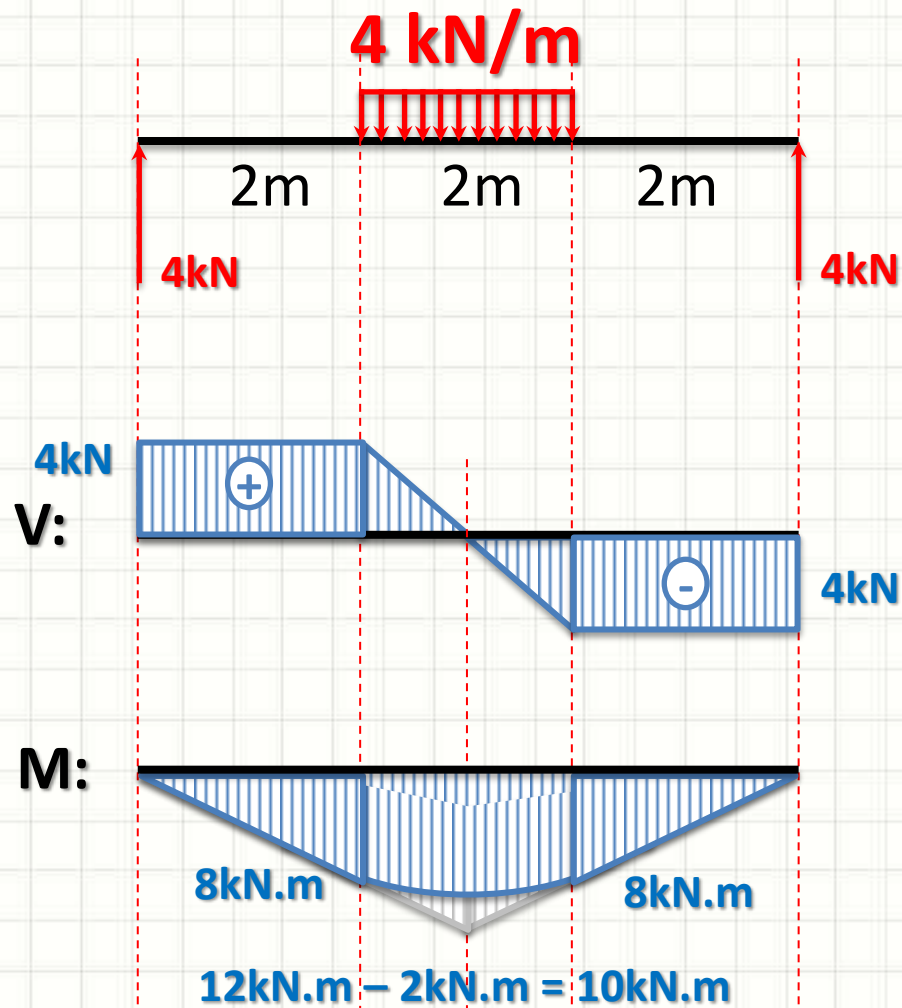
# Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



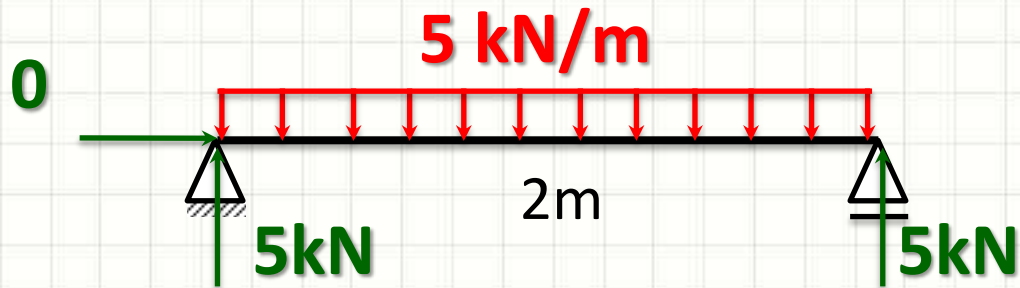
# Exemplo

- Diagramas de Cortante e Momento para:



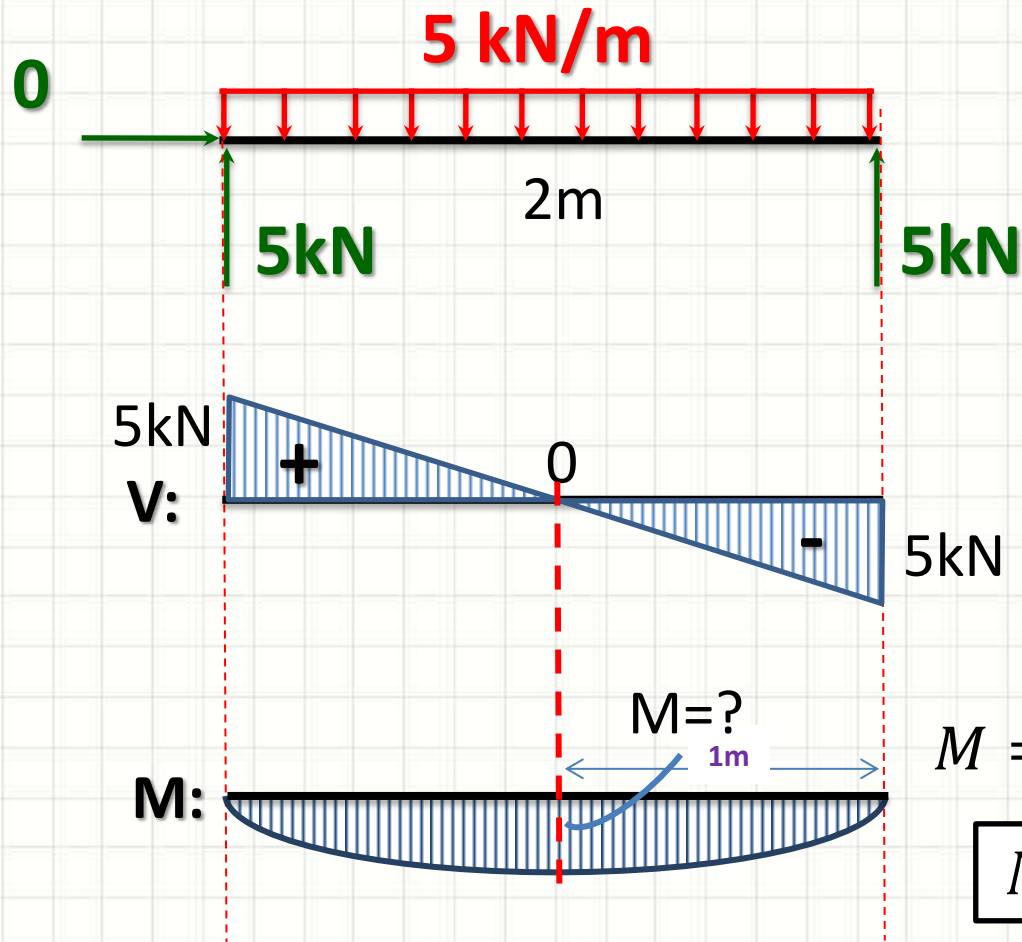
# Exercício

- Diagramas de cortante e momento



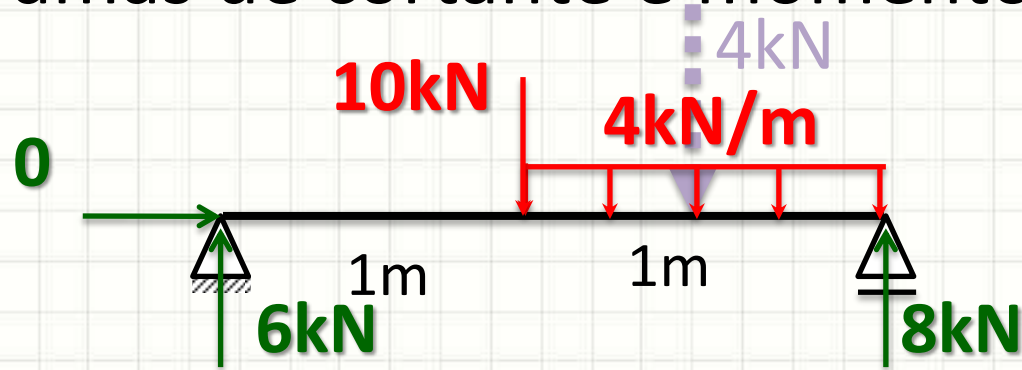
# Exercício

- Diagramas de cortante e momento



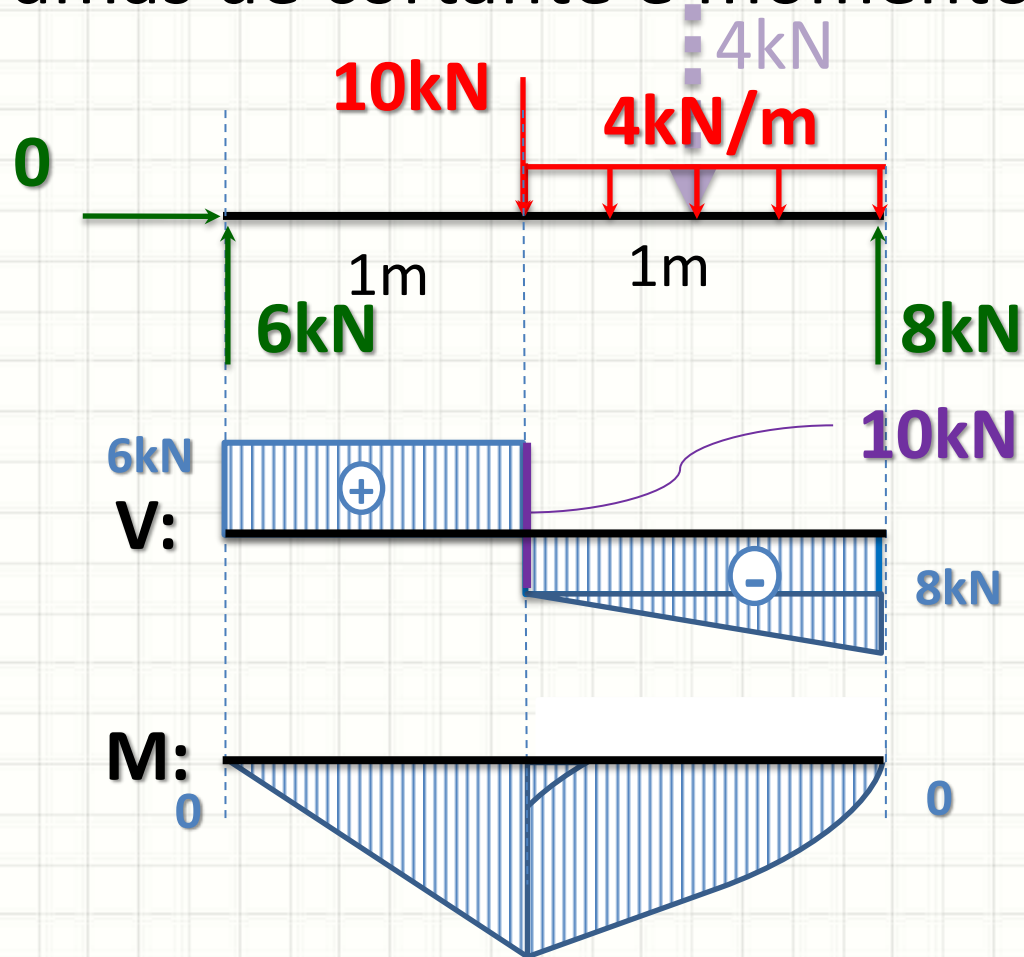
# Exercício

- Diagramas de cortante e momento:



# Exercício

- Diagramas de cortante e momento:





# CONCLUSÕES

# Resumo

- Cargas Distribuídas
  - Aplicação do teorema do corte
- Diagramas de cortante com cargas distribuídas
- Diagramas de momentos fletores
- **TAREFA:** Exercícios Aula 7
- Tensões Normais e Cisalhantes
- Compreendendo o material por dentro
  - As tensões internas no material

**SAVA8!**

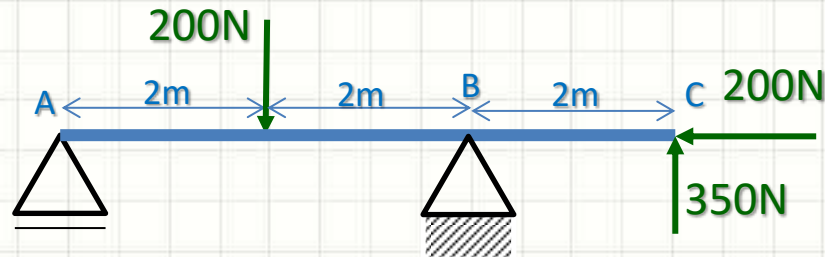




**PERGUNTAS?**

# Exercício para casa

Trace o diagrama de momento fletor:



# Exercício para casa - Extra

- Trace os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo.

