Aula 05: Probabilidade Básica

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar os conceitos de probabilidades e seu cálculo.

Bibliografia:

- FONSECA, J. S; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. São Paulo: Atlas, 1996.
- NETO, P. L. O. C. Estatística. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- NETO, P. L. O. C; CYMBALISTA, M. Probabilidades. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

1. INTRODUÇÃO

Na natureza, existe uma infinidade de fenômenos complexos observáveis. De forma genérica, usamos modelos matemáticos para melhor compreender tais fenômenos e estes modelos podem ser de dois tipos: determinísticos ou probabilísticos.

O modelo determinístico é aquele que possui uma representação por uma fórmula fechada, que sempre apresenta um mesmo resultado para um experimento. O modelo probabilístico é aquele em que há diversas possibilidades de resultado para o mesmo experimento, cada uma delas associadas a uma probabilidade.

Um exemplo de um modelo determinístico é o que define o peso de um corpo. Conhecendo a massa e a aceleração da gravidade, podemos dizer que:

$$\text{peso} = \text{massa} \times \text{aceleração\_da\_gravidade}$$

Por outro lado, para dizer se uma pessoa vai acertar os números da mega-sena (ou não), usa-se um modelo probabilístico. Considerando que não houve trapaças, no máximo podemos dizer que a pessoa tem determinada probabilidade de acertar.

Entretanto, a maioria dos fenômenos observáveis possuem resultados que variam mesmo em condições normais de experimentação. Este tipo de fenômeno dificulta o estabelecimento de modelos matemáticos (tanto modelos determinísticos quanto probabilísticos). Por exemplo: se medirmos o tempo de queda de um determinado corpo (fenômeno determinístico), da mesma altura, em cada medida teremos um valor ligeiramente diferente.

Tais **fenômenos** são denominados **aleatórios**, e são estudados pela Estatística, usando o modelo de cálculo de probabilidades.

2. FENÔMENOS ALEATÓRIOS

Experimentos aleatórios (**E**) são aqueles relacionados a fenômenos aleatórios, cujos **resultados são previsíveis apenas como uma probabilidade**. São exemplos de experimentos aleatórios:

1) Contar o número de peças defeituosas em uma linha produção, por semana;
2) Observar a cor de uma dada carta, retirada de um baralho;
3) O valor da face superior de um dado lançado;
4) Jogar uma moeda várias vezes e contar o número de coroas obtidas.

Observe que cada um destes experimentos **pode ser repetido indefinidamente**, nas mesmas condições. Além disso, em todos os casos **são conhecidos os possíveis resultados**, embora não se saiba qual deles irá ser o resultado em cada experimento. Finalmente, é possível estabelecer uma relação estável:

frequência = resultado_obtido / número_de_experimentos

quando o "número_de_experimentos" for relativamente grande.

3. ESPAÇO AMOSTRAL E EVENTOS

Como foi visto na seção anterior, em um experimento aleatório são conhecidos os possíveis resultados. É denominado **Espaço Amostral** (**S**) o **conjunto de todos os possíveis resultados** de um experimento aleatório, podendo ser infinito ou não. Exemplos:

1) E = pegar uma peça da linha de produção e observar se é defeituosa:
S = { defeituosa, perfeita }

2) E = tirar duas cartas do baralho e observar suas cores:
S = { (preta,preta), (preta,vermelha), (vermelha,preta), (vermelha,vermelha) }

Um **Evento é um conjunto de resultados do experimento** ou, em outras palavras, um subconjunto de S. Por exemplo, se considerarmos o experimento anterior, de tirar duas cartas do baralho e observar suas cores, podemos considerar o evento A como sendo o evento de sair duas cartas pretas.

A = { (preta,preta) }

Se o evento B for o evento de sair exatamente uma carta preta e uma vermelha, este conjunto tem dois elementos:

B = { (preta,vermelha), (vermelha,preta) }

Podemos definir então o conjunto A ∪ B (união), que seria:

A ∪ B = { (preta,preta), (preta,vermelha), (vermelha,preta) }

Ou seja, A ∪ B é o evento de sair pelo menos uma carta preta. Podemos definir também A ∩ B (interseção), que seria:

A ∩ B = { ø }

Que é o conjunto vazio, já que não há elementos comuns entre os eventos A e B. Podemos dizer que A e B são eventos mutuamente exclusivos já que nenhum resultado possível pertence simultaneamente a ambos.

É possível ainda definir o evento Ä, que é o evento complemento de A (ou seja, quando A não ocorre), que seria:

Ä = { (preta,vermelha), (vermelha,preta), (vermelha,vermelha) }

4. PROBABILIDADE

Considere um experimento aleatório qualquer E, que possui um determinado número de soluções (espaço amostral) S. A probabilidade de um evento A, P(A), é uma função definida em S que associa a cada evento um número real, obedecendo às seguintes regras:

1) $0 \leq P \leq 1$
2) $P(S) = 1$ (evento certo)

3) Se A ∩ B = Ø , então P(A U B) = P(A) + P(B)

Como uma probabilidade varia sempre de 0 a 1, ela pode ser entendida como uma porcentagem. Por exemplo: se a probabilidade de um dado resultado é 0,1, na realiza∩ão de 100 experimentos é esperado que saiam por volta de 10 vezes este resultado específico (10%).

A definição de probabilidade tem algumas propriedades:

1) Se Ø é o conjunto vazio, então P(Ø) = 0.

Ou seja, dado que um experimento sempre tem um resultado, o evento "nenhum resultado" é chamado de "evento impossível".

2) Se Ä é o complemento de A, então P(Ä) = 1 - P(A).

Ou seja, sendo 1 a probabilidade do espaço todo, a probabilidade de **não** ocorrer um evento A é 1 subtraído da probabilidade de ocorrer o evento A. Em outras palavras, é a probabilidade de ocorrer "qualquer coisa" que não seja aquela prevista no evento A. Matematicamente, dado que **Ä** contém todos os elementos de **S** que não estão em **A**, podemos dizer que **S = Ä U A**. Assim, **P(S) = P(Ä U A)**. Mas **P(S) = 1** e, como **Ä** e **A** são mutuamente exclusivos, **P(Ä U A) = P(Ä) + P(A)**. Assim, podemos reescrever **P(S) = P(Ä U A)** como **1 = P(Ä) + P(A)**, ou **P(Ä) = 1 - P(A)**.

3) Se A ⊂ B, P(A) ≤ P(B).

Ou seja, se um evento A é mais restrito que o evento B (qualquer ocorrência de A é também de B, mas nem toda de B é de A), a probabilidade de ocorrer um evento de A é menor que a probabilidade de ocorrer um evento de B. Matematicamente, se **A ⊂ B**, pode-se dizer que **B = A U (Ä ∩ B)**. Como **A** e **(Ä ∩ B)** são mutuamente exclusivos, podemos dizer que **P(B) = P(A) + P(Ä ∩ B)**, ou ainda que **P(Ä ∩ B) = P(B) - P(A)**. Como **P(B) - P(A) ≥ 0**, podemos dizer que **P(A) ≤ P(B)**.

4) Se A e B são eventos quaisquer, P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B).

Ou seja, a probabilidade de um evento união A e B é a probabilidade dos elementos de A somada com a probabilidade dos elementos de B, subtraindo a probabilidade dos elementos que estão em ambos os eventos (já que esta terá sido contada duas vezes). Matematicamente, se A e B são mutuamente exclusivos, **A ∩ B = Ø** e recaímos no axioma 3. Por outro lado, se **A ∩ B ≠ Ø**, temos de realizar uma demonstração. Partindo de que **P(A U B) = P[A U (Ä ∩ B)] = P(A) + P(Ä ∩ B)**, e que **P(B) = (A ∩ B) + P(Ä ∩ B)** de onde tiramos que **P(Ä ∩ B) = P(B) - P(A ∩ B)**, podemos fazer uma substituição e chegar ao resultado de que **P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)**.

Em muitos casos, a frequência relativa de um evento, obtida através de experimentos, pode ser uma boa aproximação da probabilidade de ocorrência deste evento. Apesar de algumas vezes grosseira, a frequência relativa é, às vezes, a única forma de se avaliar uma dada probabilidade.

4.1. Probabilidades Finitas dos Espaços Amostrais Finitos

Se cada elemento de um espaço amostral finito **S** tem uma probabilidade $\mathbf{a_i}$ de ocorrer, qualquer evento composto terá uma probabilidade igual à soma das probabilidades de ocorrer de cada um de seus eventos individuais.

Exemplo: Numa prova, temos as alternativas A, B e C. A alternativa A tem duas vezes mais probabilidade de estar certa que a B. A alternativa B tem duas vezes mais probabilidade de estar certa que a alternativa C. Quais são as probabilidades de cada alternativa ser correta? E qual a probabilidade de a resposta ser A ou C?

Solução: se associarmos a probabilidade p à P(C), podemos dizer que P(B) = $2p$ e que P(A) = $4p$. Assim, podemos dizer que $p + 2p + 4p = 1$, pelo segundo axioma. Em outras palavras, $7p = 1 \rightarrow p = 1/7$. Assim, P(A) = 4/7, P(B) = 2/7 e P(C) = 1/7.

A probabilidade de A ou C ser correta é o mesmo que dizer a P(A ∪ C), sendo que A e C são mutuamente exclusivos. Ou seja: P(A ∪ C) = P(A) + P(C) = 4/7 + 1/7 = 5/7.

Quando as **probabilidades de todos os elementos** do espaço amostral **S são iguais**, dizemos que este é um **espaço amostral equiprovável**. Neste caso, se o espaço amostral tem **n** elementos, a probabilidade de cada elemento será **1/n**. Se um evento é composto por **r** elementos, sua probabilidade será r * (1/n) = **r/n**.

Uma fórmula simplificada é:

P(A) = Número_de_Casos_Favoráveis / Número_Total_de_Casos

Exemplo: qual a probabilidade de sair um número PAR quando jogamos um dado?

Solução: O número de casos favoráveis é 3 (2, 4 e 6) e o número total de casos é 6 (1, 2, 3, 4, 5, 6). Desta forma, a probabilidade de sair um número par é 3/6 = 1/3. 1/3 é aproximadamente 0,333 que é 33,3%.

Nem sempre é tão simples calcular o número total de casos. Muitas vezes temos situações onde precisamos calcular números de grupos combinados. Nestes casos, usamos a fórmula de combinação para determinar o número total de casos, de r termos, p a p (Lê-se: Combinação de **r** elementos, **p** a N):

$$C_{r,p} = \binom{r}{p} = \frac{r!}{p!\,(r-p)!}$$

Por exemplo: podemos combinar 10 pessoas em quantos grupos diferentes, de 3 pessoas?

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10.9.8.7!}{3.2.7!} = 120$$

5. BIBLIOGRAFIA

MARINHO, P. Probabilidade e Estatística Aplicada à Engenharia. Rio de Janeiro, SESES, 2016.
FONSECA, J. S; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. São Paulo: Atlas, 1996.
NETO, P. L. O. C. Estatística. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
NETO, P. L. O. C; CYMBALISTA, M. Probabilidades. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.