Aula 06: Probabilidade Condicional

Prof. Daniel Caetano

Objetivo: Apresentar os conceitos de probabilidades condicionais e seu cálculo.

Bibliografia:

- FONSECA, J. S; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. São Paulo: Atlas, 1996.
- NETO, P. L. O. C. Estatística. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- NETO, P. L. O. C; CYMBALISTA, M. Probabilidades. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

1. PROBABILIDADES CONDICIONAIS

Chamamos probabilidade condicional quando a probabilidade de um evento ocorrer é atrelada à probabilidade de algum outro evento. Por exemplo, consideremos o evento A como a saída de um número par quando for jogado um dado honesto. Consideremos um evento B como a saída do número 4 quando o dado for jogado.

Como os números pares do dado são 3 e o número total de casos é 6, P(A) = 3/6 = 1/2. Por outro lado, existe apenas um número 4 no dado. Assim, P(B) = 1/6. Entretanto, dado que um número par saiu, qual a probabilidade de ele ser 4? Em "matematiquês", diríamos "dado que o evento A ocorreu, qual a probabilidade do evento B também ter ocorrido?"

Bem, uma vez que o evento A já aconteceu, o novo espaço amostral é de apenas 3 possibilidades: S = { 2, 4, 6 }. Desta forma, 4 é um de três possibilidades. Portanto, a probabilidade de, tendo saído um número par, ele ser igual a 4 é 1/3. Representamos este resultado da seguinte forma:

P(B|A) = 1/3

O que pode ser lido como "A probabilidade do evento B dado que o evento A ocorreu é 1/3", ou simplesmente "A probabilidade de B, dado A, é 1/3". É interessante possuir uma fórmula geral para o cálculo de probabilidades condicionais. Esta fórmula é:

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Quando não há mudança do total de casos entre os eventos A e B, a fórmula pode ser reescrita, simplificadamente, como:

P(B|A) = Número_de_Casos_Favoráveis (A $\cap$ B) / Número_Casos_Favoráveis (A)

No exemplo apresentado, como trata-se de uma única jogada do dado, o universo total é de ambos é 6, assim, pode-se usar a versão simplificada: **A $\cap$ B = { 4 }** e **A = { 2, 4, 6 }**, resultando em **P(B|A)** = 1/3.

É importante notar que, em alguns casos, esse resultado pode facilitar o cálculo de P(A $\cap$ B), quando for sabida a probabilidade condicional relativa. Afinal, se

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

Ou ainda

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A \cap B) = P(B).P(A|B)}$$

Exemplo: Em um jogo, temos 15 peças, sendo 10 redondas e 5 quadradas. São retiradas 2 peças, uma após outra, **sem** reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam redondas?

Solução: Temos dois experimentos: retirar a primeira peça e retirar a segunda peça. Queremos que o primeiro experimento seja um evento A = { redonda } eo segundo experimento seja um evento B = { redonda }. Em outras palavras, queremos que A Ç B = { redonda }. Assim, queremos a P(A Ç B) = { redonda }. Com não há reposição e o espaço amostral muda de um experimento para outro, não sendo possível usar a versão simplificada. Vamos usar a seguinte fórmula:

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A).P(B|A)}$$

P(A) = número de peças redondas / número total de peças = 10/15.

Para o cálculo de P(B|A), modificamos o espaço amostral S para que indique a situação após o evento A ocorrer. Isso quer dizer que, se em A saiu uma bola redonda, agora temos apenas 14 peças, compostas por 9 peças redondas e 5 quadradas. Assim, temos nove possibilidades de sucesso para um total de 14 peças, ou seja:

P(B|A) = 9/14

Substituindo na fórmula,

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ $=10/15 \cdot 9/14 = 90/(15.14) = 6/14 = 3/7 \sim 0,428$

NOTA! Quando for usar a fórmula **$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$** para calcular **$P(A \cap B)$**, não tente usar **$P(A \cap B)$** para calcular **$P(B|A)$**, por razões óbvias!

Uma situação interessante ocorre, entretanto, quando os eventos A e B são **independentes**, isto é, **$P(B|A) = P(B)$** e **$P(A) = P(A|B)$** (a probabilidade de A e B ocorrer não muda pela ocorrência anterior de B ou A, respectivamente). A situação prática onde isto ocorre é quando há reposição de elementos na amostra (por exemplo, quando jogamos duas vezes um dado, o mesmo número pode sair novamente). Neste caso, a fórmula para o cálculo de **$P(A \cap B)$** é bastante mais simples:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Exemplo: Em um jogo, temos 15 peças, sendo 10 redondas e 5 quadradas. São retiradas 2 peças, uma após outra, **com** reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam redondas?

Solução: Temos dois experimentos: retirar a primeira peça e retirar a segunda peça. Queremos que o primeiro experimento seja um evento A = { redonda } **e** o segundo experimento seja um evento B = { redonda }. Em outras palavras, queremos que A Ç B = { redonda }. Assim, queremos a P(A Ç B) = { redonda }. Como há reposição e, portanto, o espaço amostral não muda de um caso para outro, vamos usar a seguinte fórmula:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Assim:

P(A) = número de peças redondas / número total de peças = 10/15.
P(B) = número de peças redondas / número total de peças = 10/15.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $=10/15 * 10/15 = 100/225 = 4/9 \sim 0,444$

2.BIBLIOGRAFIA

FONSECA, J. S; MARTINS, G. A. Curso de Estatística. São Paulo: Atlas, 1996.
NETO, P. L. O. C. Estatística. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

NETO, P. L. O. C; CYMBALISTA, M. Probabilidades. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.