Análise de Dados

Probabilidades Condicionais

Prof. Dr. Daniel Caetano

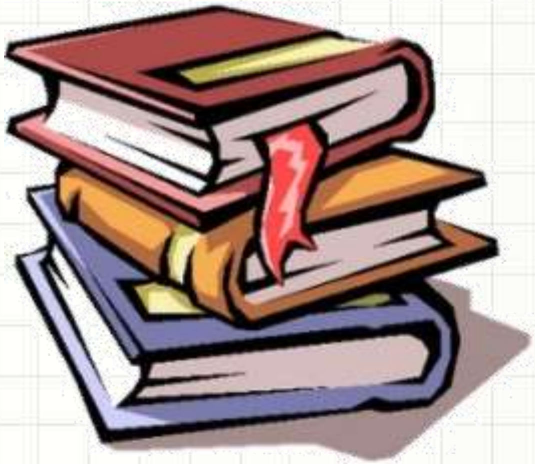
2020 - 1

Objetivos

- Consolidar o conceito eventos independentes x dependentes
- Compreender o conceito de probabilidade condicional
- Capacitar para identificar e calcular probabilidades condicionais

- **Atividade da Aula 6 no SAVA!**

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Análise de Dados – Aula 6)
Material Didático	• Probab. e Estatística Aplicada à Engenharia – Cap. 5
Minha Biblioteca	Estatística – Teoria e Aplicações usando MS Excel – Cap. 4 Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros – Cap. 2

Eventos Dependentes e Independentes

Eventos Independentes

- O que são?

- Quando a ocorrência de um evento é independente do outro
- A ocorrência de um evento não muda a probabilidade do evento seguinte

Eventos Independentes

- Exemplos

1. Tirar uma carta de ouros, tirar uma de rei
   - Com reposição
2. Jogar o dado e dar 3, jogar outro dado e dar 5
3. Jogar moeda e dar cara, jogar outra e dar coroa
4. Sair 6 números na sena, sair os mesmos 6 números
5. ...

Eventos Dependentes

- O que são?

- Quando a ocorrência de um evento está relacionada à ocorrência de outro
- A ocorrência de um muda a probabilidade do evento seguinte

Eventos Dependentes

- Exemplos

1. TV defeituosa -> TV com defeito na tela
2. 1ª carta ouros -> 2ª carta ser também de ouros
3. Dado com valor par -> dado número 4
4. Ser sorteado em um consórcio -> ser sorteado no mesmo consórcio
5. ...

Probabilidade Condicional de Eventos Independentes

Prob. Condicional: Eventos Indep.

- Joguei moeda
  - (A) Probabilidade de sair cara?

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$$

- Joguei moeda novamente...
  - (B) Probabilidade de sair cara?

$$P(B) = \frac{1}{2} = 0,5$$

O resultado não mudou

Prob. Condicional: Eventos Indep.

- Joguei moeda duas vezes...
  - (C) Qual a probabilidade de sair cara duas vezes?
- Esp. Amostral: S={ Ca,Ca; Ca,Co; Co,Ca; Co,Co }
  - Todos equiprováveis
- Eventos de interesse: { Ca,Ca }

$$P(C) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Sempre teremos de enumerar?

Prob. Condicional: Eventos Indep.

- Vejamos o problema por outro ângulo...
- Evento A: jogar 2x e sair Ca na 1ª
  - **Ca,Co**; **Ca,Ca**; Co,Ca; Co,Co
  - P(A) = 0,5
- Evento B: jogar 2x e sair Ca na 2ª
  - Ca,Co; **Ca,Ca**; **Co,Ca**; Co,Co
  - P(B) = 0,5
- Evento C: jogar duas vezes e cair Ca, Ca:

$$P(C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0,25$$

Prob. Condicional: Eventos Indep.

- Sempre que os eventos forem independentes
  - Não importa # vezes seguidas que jogue a moeda
  - Em cada vez, a probabilidade de Ca é sempre igual
- Evento A: jogar e sair Ca
  - P(A) = 0,5
- Evento B: jogar e sair Ca
  - P(B) = 0,5
- Evento C: jogar duas vezes e cair Ca, Ca:

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0,25$$

Regra da Multiplicação

Prob. Condicional: Eventos Indep.

- Note a diferença
- (A): Jogar 2x e sair 1 Ca na 1ª
- (B): Jogar 2x e sair 1 Ca na 2ª
- (C): Jogar 2x e sair Ca,Ca

$$P(C) = P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0,25$$

- (D): Jogar 2x e sair pelo menos 1x Ca
  - Da aula passada: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = 0,5 + 0,5 - 0,25 = 0,75$$

Exemplo: 1 Carta do Baralho

- Probabilidade de sair carta vermelha (A)

$$P(A) = \frac{26}{52} = 0,5$$

$\blacklozenge A, 2,3,4,5,6,7,8,9, J, Q, K$

$\heartsuit A, 2,3,4,5,6,7,8,9, J, Q, K$

- Probabilidade de uma carta Rei (B)

$$P(B) = \frac{4}{52} = 0,0769$$

$\spadesuit K, \clubsuit K, \blacklozenge K, \heartsuit K$

- Qual a probabilidade de ser rei vermelho (C)?

$$P(C) = P(A \cap B) = \frac{2}{52} = 0,0385$$

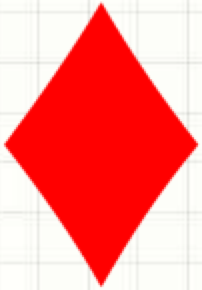
$\blacklozenge K, \heartsuit K$

Probabilidade Condicional de Eventos Dependentes

Prob. Condicional: Eventos Depend.

- Tirei uma carta do baralho
  - (A) Probabilidade da 1ª carta ser de ouros?

$$P(A) = \frac{13}{52} = 0,250$$



- Sem repor, tirei outra carta...
  - (B) Qual a probabilidade da 2º carta ser de copas?

$$P(B) = \frac{13}{51} = 0,255$$

Por que mudou?

Prob. Condicional: Eventos Depend.

- Escrevemos isso assim:
  - (A) 1ª carta ser de ouros $P(A) = \frac{13}{52} = 0,250$
  - (B) 2ª carta ser de copas $P(B|A) = ?$

$$P(B|A) = \frac{13}{51} = 0,255$$

- Qual a probabilidade de A e B simultâneos?

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

- O que leva a outra versão útil...

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Exemplo

- Em uma gaveta há 12 camisas: 4 são de gola polo e 8 normais. Retirando sucessivamente duas ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de saírem duas camisas polo?
- A: 1ª retirada:
  - Casos de sucesso: **4**
  - Casos totais: **12**

$$P(A) = \frac{4}{12} = 0,33$$

- B|A: 2ª, supondo sucesso na 1ª
  - Casos de sucesso: **3**
  - Casos totais: **11**

$$P(B|A) = \frac{3}{11} = 0,27$$

Exemplo

- Em uma gaveta há 12 camisas: 4 são de gola polo e 8 normais. Retirando sucessivamente duas ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de saírem duas camisas polo?
- A: 1ª retirada: $P(A) = 0{,}33$
- B|A: 2ª, supondo sucesso na 1ª: $P(B|A) = 0{,}27$
- Probabilidade dos dois eventos em sequência:

$$P(A \cap B) = \ P(A).P(B|A) = 0{,}33\,.\,0{,}27 \cong \ \mathbf{0,09}$$

Probabilidade Condicional: Análise de Eventos Independentes

Comparando com Evento Indep.

- Probabilidade de sair carta vermelha (A)

$$P(A) = \frac{26}{52} = 0,5$$

$\blacklozenge A, 2,3,4,5,6,7,8,9, J, Q, K$

$\heartsuit A, 2,3,4,5,6,7,8,9, J, Q, K$

- Probabilidade de uma carta Rei (B)

$$P(B) = \frac{4}{52} = \boxed{0,0769}$$

$\spadesuit K, \clubsuit K, \blacklozenge K, \heartsuit K$

- Probabilidade de ser rei vermelho (A ∩ B)?

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = 0,0385$$

$\blacklozenge K, \heartsuit K$

- Probabilidade de rei, dado que vermelho (B|A)

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,0385}{0,5} = \boxed{0,0769}$$

Aplicando a Eventos Independentes

- Probabilidade de sair carta vermelha (A)

Quando os eventos A e B são independentes, P(B) = P(B|A)

- Probabilidade de ser rei vermelho (A ∩ B)?

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = 0{,}0385$$

♦K, ♥K

- Probabilidade de rei, dado que vermelho (B|A)

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}0385}{0{,}5} = \boxed{0{,}0769}$$

Eventos Indep.: Simplificação

- A – Vermelho, B – Rei, mesma carta

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B) . \frac{1}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{Favoráveis(A \cap B)}{Total}$$

$$\frac{1}{P(A)} = \frac{Total}{Favoráveis(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{Favoráveis(A \cap B)}{\cancel{Total}} . \frac{\cancel{Total}}{Favoráveis(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{Favoráveis(A \cap B)}{Favoráveis(A)}$$

Eventos Indep.: Simplificação

- A – Vermelho, B – Rei, mesma carta

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(A \cap B).\frac{1}{P(A)}$$

$P(A \cap$ … $Favoráveis(A \cap B)$ … 1 … $Total$ … $eis(A)$

Só vale para quando não muda o espaço amostral

$P(B|$ … $\cancel{Total}$ … $Favoráveis(A)$

$$P(B|A) = \frac{Favoráveis(A \cap B)}{Favoráveis(A)} = P(B)$$

Eventos Independentes

Eventos Indep.: Simplificação

- A – Vermelho, B – Rei, mesma carta

$$P(B|A) = \frac{Favoráveis(A \cap B)}{Favoráveis(A)}$$

$$\blacklozenge A, 2,3,4,5,6,7,8,9, J, Q, K$$
$$\heartsuit A, 2,3,4,5,6,7,8,9, J, Q, K$$

$$\spadesuit K, \clubsuit K, \blacklozenge K, \heartsuit K$$

$$P(B|A) = \frac{2}{26} = 0{,}0769$$

CONCLUSÕES

Resumo

- Eventos dependentes e independentes
- Probabilidades Condicionais
  - Eventos independentes
  - Eventos dependentes
- Regra da Multiplicação

- Variáveis Aleatórias Discretas x Contínuas
  - Funções de distribuição de probabilidade
  - Esperança, variância e desvio padrão

PERGUNTAS?

Exercícios

Exercícios

- 1. Em uma caixa há 10 balas de menta, 12 de uva e 4 de framboesa. Qual a probabilidade de serem retirados 3 balas de uva?

Exercícios

- 1. Em uma caixa há 10 balas de menta, 12 de uva e 4 de framboesa. Qual a probabilidade de serem retirados **3** balas de **uva**?
- A: 1ª retirada
  - Sucesso: **12** Totais: **26** $P(A) = \frac{12}{26} = 0,46$
- B|A: 2ª, com sucesso na 1ª
  - Sucesso: **11** Totais: **25** $P(B|A) = \frac{11}{25} = 0,44$
- C|B|A: 3ª, com sucesso na 1ª e 2ª
  - Sucesso: **10** Totais: **24** $P(C|B|A) = \frac{10}{24} = 0,42$

Exercícios

- 1. Em uma caixa há 10 balas de menta, 12 de uva e 4 de framboesa. Qual a probabilidade de serem retirados **3** balas de **uva**?
- A: 1ª retirada $P(A) = 0{,}46$
- B|A: 2ª, c/sucesso na 1ª $P(B|A) = 0{,}44$
- C|B|A: 3ª, c/sucesso na 1ª e 2ª $P(C|B|A) = 0{,}42$

$$P(A \cap B \cap C) = \; P(A).P(B|A).P(C|B|A) =$$

$$0{,}46 \,.\, 0{,}44 \,.\, 0{,}42 \cong \; \mathbf{0,085}$$

$$\mathbf{8,5}\%$$

Exercícios

- 2. Em uma caixa há 10 balas de menta, 12 de uva e 4 de framboesa. Qual a probabilidade de serem retirados 3 balas de uva, se houver reposição da bala retirada por outra igual?

Exercícios

- 2. Em uma caixa há 10 balas de menta, 12 de uva e 4 de framboesa. Qual a probabilidade de serem retirados **3** balas de **uva**, se houver **reposição** da bala retirada por outra igual?
- No, o sucesso em qualquer das três retiradas (A, B e C) possui a mesma probabilidade (são eventos independentes!):

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{12}{26} = 0,46$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C) = 0{,}46^3 \cong \mathbf{0,097}$$

$$\mathbf{9,7\%}$$

Exercícios

- 3. Sabemos que um baralho é composto de 52 cartas, onde temos a representação de quatro naipes: copas, ouro, paus e espadas. Dessa forma, cada naipe é representado por 13 cartas. Determine a probabilidade de escolhermos ao acaso e sucessivamente, **três cartas de ouros sem reposição**.

Exercícios

- 3. Determine a probabilidade de escolhermos ao acaso e sucessivamente, **três cartas de ouros sem reposição**.

$$P(A) = \frac{13}{52} = 0{,}25 \qquad P(B|A) = \frac{12}{51} = 0,23$$

$$P(C|B|A) = \frac{11}{50} = 0,22$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B|A).P(C|B|A) =$$

$$0{,}25 \,.\, 0{,}23 \,.\, 0{,}22 \cong \mathbf{0,013}$$

$$\mathbf{1,3}\%$$

Exercícios

- 4. Sabemos que um baralho é composto de 52 cartas, onde temos a representação de quatro naipes: copas, ouro, paus e espadas. Dessa forma, cada naipe é representado por 13 cartas. Determine a probabilidade de escolhermos ao acaso e sucessivamente, **três cartas de um mesmo naipe sem reposição**.

Exercícios

- 4. Determine a probabilidade de escolhermos ao acaso e sucessivamente, **três cartas de um mesmo naipe sem reposição**.
- Como não se especifica um naipe, a primeira carta pode ser qualquer uma. Logo:

$P(A) = \frac{52}{52} = 1 \quad P(B|A) = \frac{12}{51} = 0,23 \quad P(C|B|A) = \frac{11}{50} = 0,22$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B|A).P(C|B|A) =$$

$$1 \,.\, 0{,}23 \,.\, 0{,}22 \cong \mathbf{0,051}$$

$$\mathbf{5,1}\%$$