Análise de Dados

Variáveis Aleatórias Discretas, Contínuas e Suas Probabilidades

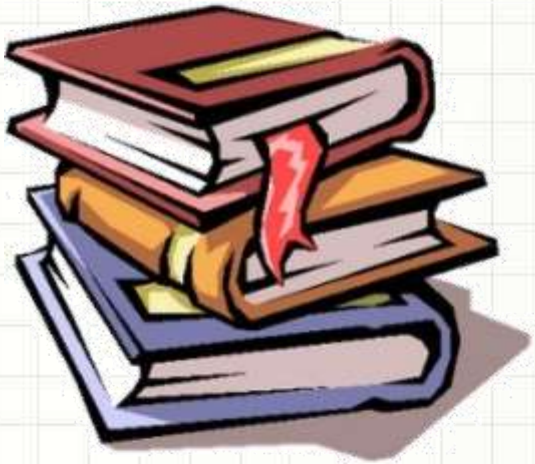
Prof. Dr. Daniel Caetano

2020 - 1

Objetivos

- Compreender os conceitos de variáveis aleatórias discretas e contínuas
- Compreender e construir distribuições e funções de probabilidade
- Compreender e calcular a esperança matemática, a variância e o desvio padrão de uma variável aleatória
- **Atividade da Aula 7 no SAVA!**

Material de Estudo



Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Análise de Dados – Aula 7)
Material Didático	• Probab. e Estatística Aplicada à Engenharia – Cap. 6
Minha Biblioteca	Estatística – Teoria e Aplicações usando MS Excel – Cap. 5 Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros – Cap. 3

Variáveis Aleatórias

Variáveis Aleatórias

- O que são?
  - Definidas como a função que atribui um valor para cada elemento do espaço amostral

O que era?

O conjunto de todos os resultados possíveis para um experimento aleatório

Variáveis Aleatórias

- Espaço amostral qualitativo?
  - Resultados não são numéricos
  - Exemplo: X = resultado de jogar moeda 2x
    - S = { Ca; Co } Ca = 0
    - R = { 0; 1 } Co = 1
  - Exemplo: X = soma da face superior de 2 dados
    - S = {(1,1); (1,2);...; (6,5); (6,6)}
    - R = { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 }

Variáveis Aleatórias

- Espaço amostral numérico (quantitativo)
  - Discreto: variável aleatória discreta
    - Exemplo: X = Resultado do lançamento de um dado
    - S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
    - Variável aleatória X definida em R { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
    - Variável aleatória Y definida em T { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }
  - Contínuo: variável aleatória contínua
    - Exemplo: medida da altura de uma pessoa

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

Função de Probabilidade

- O que é?
  - Uma função que atribui uma probabilidade para cada valor da variável aleatória

- Se X é a variável aleatória
  - P(X) vai indicar a função de probabilidade de X
  - P(X=**n**) é a probabilidade de X igual ao valor **n**

Função de Probabilidade

- Exemplo: no lançamento de uma moeda, X é a variável que anota a ocorrência de cara ou coroa. Qual a P(X)?

	X	P(X)
CA	0	0,5
CO	1	0,5
	TOTAL	1

Função de Probabilidade

- Exemplo: X é a soma da face superior de dois dados lançados. Qual a P(X)?

(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6);
(2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6);
(3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6);
(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6);
(5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (6,6);
(6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6);

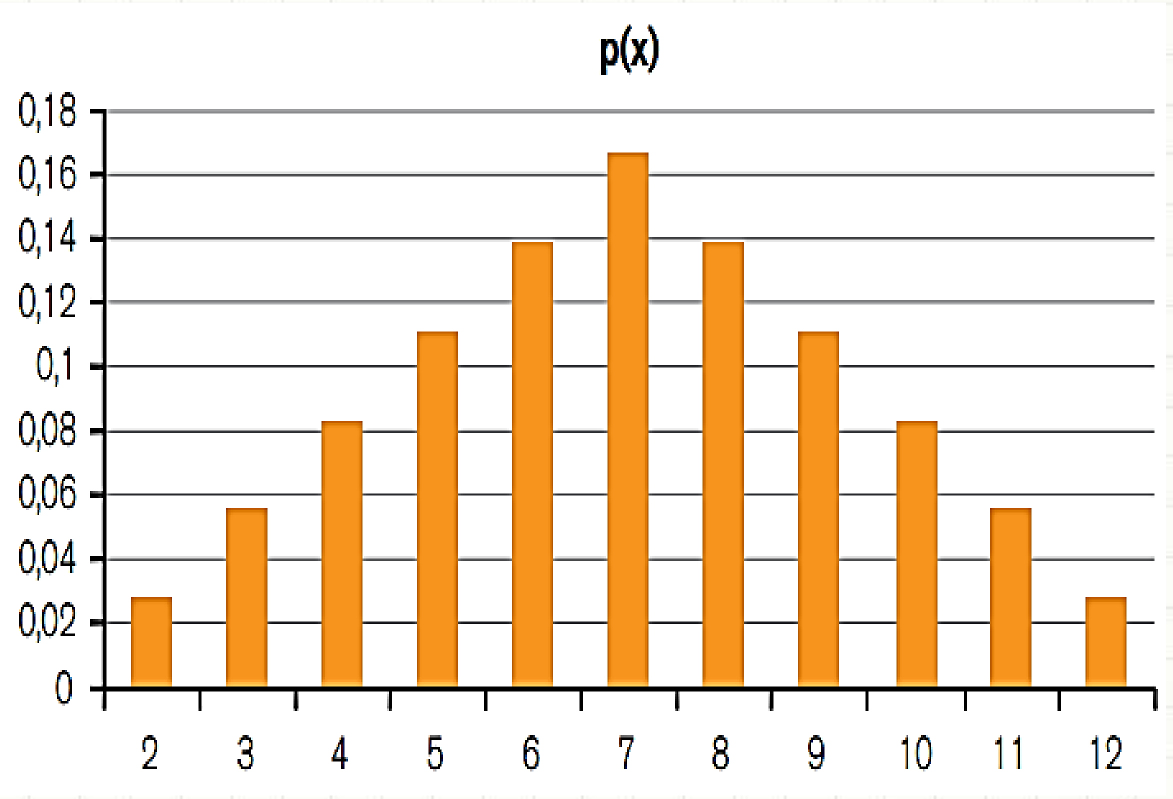
2: 1 5: 4 8: 5 11: 2
3: 2 6: 5 9: 4 12: 1
4: 3 7: 6 10: 3

X	FREQUÊNCIA SIMPLES	FREQ. RELATIVA P(X)
2	1	0,027778
3	2	0,055556
4	3	0,083333
5	4	0,111111
6	5	0,138889
7	6	0,166667
8	5	0,138889
9	4	0,111111
10	3	0,083333
11	2	0,055556
12	1	0,027778
TOTAL	36	1

Função de Probabilidade

- Exemplo: X é a soma da face superior de dois dados lançados. Qual a P(X)?

X	FREQUÊNCIA SIMPLES	FREQ. RELATIVA P(X)
2	1	0,027778
3	2	0,055556
4	3	0,083333
5	4	0,111111
6	5	0,138889
7	6	0,166667
8	5	0,138889
9	4	0,111111
10	3	0,083333
11	2	0,055556
12	1	0,027778
TOTAL	36	1



Esperança Matemática, Variância e Desvio Padrão

Esperança Matemática

- Média
  - Medimos para uma amostra ou população
- Variável aleatória: pode servir para estabelecer modelos probabilísticos para descrever populações
  - Nesse caso, a média é indicada pela letra μ
  - É conhecida como "esperança matemática"

$$\mu = E(X) = \frac{x_1 . f_1 + x_2 . f_2 + \cdots + x_n . f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

Esperança Matemática

$$p(x) = \frac{sucessos}{total}$$

- Podemos simplificar

$$\mu = E(X) = \frac{x_1.f_1 + x_2.f_2 + \cdots + x_n.f_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

$$\mu = E(X) = \frac{x_1.f_1 + x_2.f_2 + \cdots + x_n.f_n}{n}$$

$$\mu = E(X) = \frac{x_1.f_1}{n} + \frac{x_2.f_2}{n} + \cdots + \frac{x_n.f_n}{n}$$

$$\mu = E(X) = x_1.\frac{f_1}{n} + x_2.\frac{f_2}{n} + \cdots + x_n.\frac{f_n}{n}$$

$$\boldsymbol{\mu = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + \cdots + x_n.p(x_n)}$$

Variância e Desvio Padrão

- De maneira similar...
  - Podemos calcular a variância

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 . f_1 + (x_2 - \mu)^2 . f_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 . f_n}{n}$$

  - Ou...

$$\boldsymbol{\sigma^2} = (\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} . \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_1}) + (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} . \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_2}) + \cdots + (\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} . \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_n})$$

  - E o desvio padrão permanece...

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{(\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} . \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_1}) + (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} . \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_2}) + \cdots + (\boldsymbol{x_n} - \boldsymbol{\mu})^{\mathbf{2}} . \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_n})}$$

Exemplo

- Exemplo: no lançamento de uma moeda, X é a variável que anota as ocorrências de cara ou coroa. Calcule a média, a variância e o desvio padrão de X

	X	P(X)	X.P(X)	(X – MI)²P(X)
CO	0	0,5	0	0,125
CA	1	0,5	0,5	0,125
	TOTAL	1	0,5	0,25

MÉDIA MI = E(X) =	0,50
VARIÂNCIA	0,25
DESVIO PADRÃO	0,50

Exemplo

- X é a soma da face superior de dois dados lançados. Calcule média, variância e o desvio

X	FREQUÊNCIA	P(X)	X P(X)	(X – MI)²P(X)
2	1	0,0278	0,0556	0,6944
3	2	0,0556	0,1667	0,8889
4	3	0,0833	0,3333	0,7500
5	4	0,1111	0,5556	0,4444
6	5	0,1389	0,8333	0,1389
7	6	0,1667	1,1667	0,0000
8	5	0,1389	1,1111	0,1389
9	4	0,1111	1,0000	0,4444
10	3	0,0833	0,8333	0,7500
11	2	0,0556	0,6111	0,8889
12	1	0,0278	0,3333	0,6944
TOTAL	36	1	7	5,8333

MÉDIA MI = E(X) =	7,0000
VARIÂNCIA	5,8333
DESVIO PADRÃO	2,4152

Propriedades

- Propriedades de média, variância e desvio
  - Permanecem!
- Média da soma de 2 variáveis aleatórias
  - Soma das médias dessa variáveis
- Variância da soma de 2 variáveis aleatórias
  - Soma das variâncias

$$\mu_{x\pm y} = \mu_x \pm \mu_y$$

$$\sigma^2_{x\pm y} = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\sigma_{x\pm y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Conclusões

Resumo

- Variáveis aleatórias discretas e contínuas
- Probabilidades associadas à variáveis
- Função de probabilidade
- Esperança, variância e desvio padrão
  - De variáveis aleatórias

- Modelos discretos de distribuição
  - Distribuição Binomial e Poisson

Perguntas?

Exercícios

Quiz

Sobre uma função de probabilidade **NÃO** se pode dizer que...

https://kahoot.it/

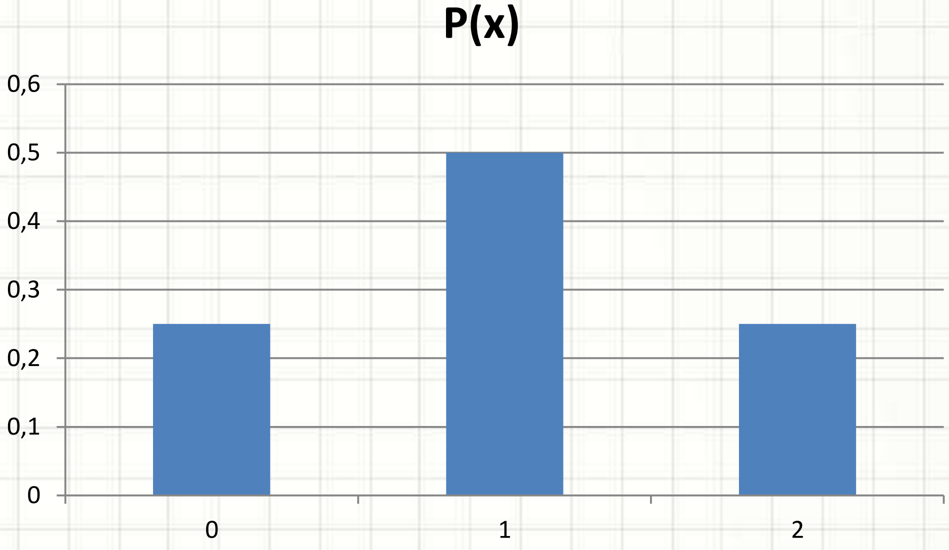
Exercícios

- 1. Um experimento consiste no lançamento de duas moedas e na observação do número de caras obtidas neste lançamento. Determine o espaço amostral e a função de probabilidade.

Exercícios

- 1. Lançamento de duas moedas, X = caras obtidas. Determine o espaço amostral e a função de probabilidade.
- S = { Co,Co; Co,Ca; Ca,Co; Ca,Ca }
- R = { 0, 1, 2 }

X	Freq.	P(X)
0	1	0,25
1	2	0,5
2	1	0,25
Total	4	1



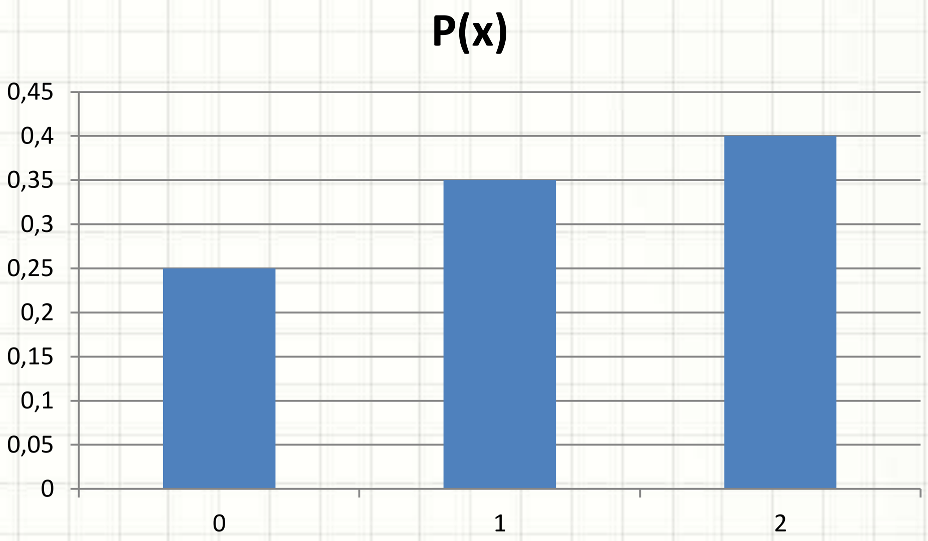
Exercícios

- 2. Um experimento consiste em retirar uma bola ao acaso de uma urna e anotar sua cor (X = cor). Sabendo que existem 20 bolas, sendo 5 brancas, 7 amarelas e 8 pretas, determine a função de probabilidade.

Exercícios

- 2.Retirar 1 bola. X = cor. São 20 bolas: 5 brancas, 7 amarelas e 8 pretas, determine a função de probabilidade.
- S = { Br; Am; Pr }
- R = { 0, 1, 2 }

X	Freq.	P(X)
0	5	0,25
1	7	0,35
2	8	0,4
Total	20	1



Exercícios

- 3. Um experimento consiste no lançamento de duas moedas e na observação do número de caras obtidas neste lançamento. Determine a média, variância e o desvio padrão.

Exercícios

- 3. Lançamento de duas moedas, X = caras obtidas. Determine a média, variância e desvio padrão.

X	Freq.	P(X)	X.P(X)	$(X-\mu)^2.P(X)$
0	1	0,25	0	0,25
1	2	0,5	0,5	0
2	1	0,25	0,5	0,25
Total	4	1	**1**	**0,5**

Média: 1

Variância: 0,5

Desvio Padrão: 0,71

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Exercícios

- 4. Um experimento consiste em retirar uma bola ao acaso de uma urna e anotar sua cor (X = cor). Sabendo que existem 20 bolas, sendo 5 brancas, 7 amarelas e 8 pretas, determine média e o desvio padrão.

Exercícios

- 2.Retirar 1 bola. X = cor. São 20 bolas: 5 brancas, 7 amarelas e 8 pretas, determine a média e o desvio padrão.

X	Freq.	P(X)	X.P(X)	$(X-\mu)^2.P(X)$
0	5	0,25	0	0,3306
1	7	0,35	0,35	0,0079
2	8	0,4	0,8	0,2890
Total	20	1	**1,15**	**0,6275**

Média: 1,15

Variância: 0,6275

Desvio Padrão: 0,79

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$