ANÁLISE DE DADOS

MODELO DISCRETO DE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE: BINOMIAL E POISSON

Prof. Dr. Daniel Caetano

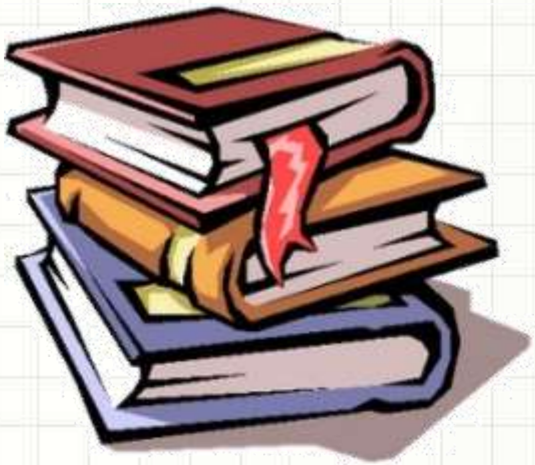
2020 - 1

Objetivos

- Compreender os modelos de probabilidade discreta
- Conhecer e compreender a distribuição de Bernoulli, Binomial e de Poisson

- **Atividade da Aula 8 no SAVA!**

Material de Estudo

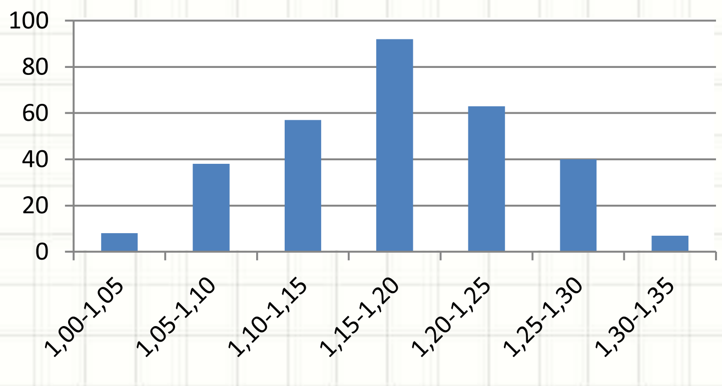


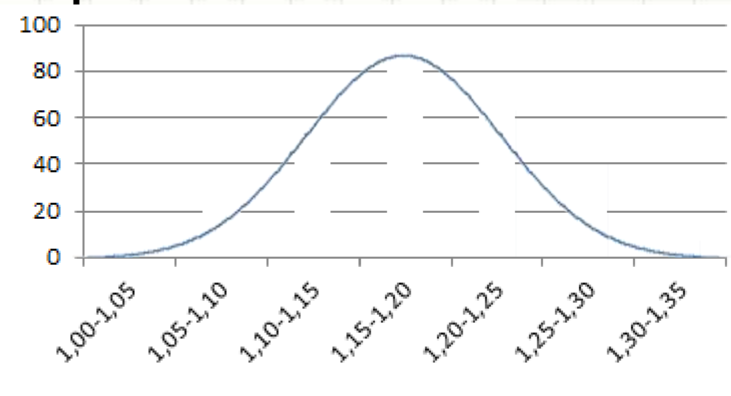
Material	Acesso ao Material
Apresentação	http://www.caetano.eng.br/ (Análise de Dados – Aula 8)
Material Didático	• Probab. e Estatística Aplicada à Engenharia – Cap. 6 • Análise Estatística – Cap. 2
Minha Biblioteca	Estatística – Teoria e Aplicações usando MS Excel – Cap. 5 Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros – Cap. 3

Modelos Discretos de Probabilidade

Modelos

- O que são?
  - São representações simplificadas da realidade com o propósito de estudo
- Para quê?
  - Experimento em campo: medimos muitos dados
    - Exemplo: medimos tempo de queda de uma bolinha
  - Qual a tendência do comportamento?





Modelos Discretos de Probabilidade

- O que são?
  - São modelos que descrevem a probabilidade de eventos representados por números inteiros
- Exemplo:
  - Qual a probabilidade de chegar 2 pessoas na fila de um banco no próximo minuto?
  - Note que **não faz sentido** dizer "qual a probabilidade de chegar 2,5 pessoas no próximo minuto"

Modelos Discretos de Probabilidade

- Alguns exemplos
  - Distribuição de Bernoulli
    - Quando há apenas dois resultados possíveis para o experimento
  - Distribuição Binomial
    - Quando o experimento é composto por diversos processos de Bernoulli e se deseja saber a probabilidade de um número X de sucessos
  - Distribuição de Poisson
    - Quando o experimento mede ocorrências em um intervalo de tempo/espaço/volume e deseja saber a probabilidade de um número de ocorrências nesse intervalo

Distribuição de Bernoulli

Distribuição de Bernoulli

- Experimentos com apenas dois resultados
  - Sucesso x Fracasso
  - 1 x 0
- Exemplos:
  - O resultado para uma doença pode ser positivo ou negativo
  - Um aluno pode passar ou ser reprovado
  - Ao jogar uma moeda, ocorre cara ou coroa.
  - ...

Distribuição de Bernoulli

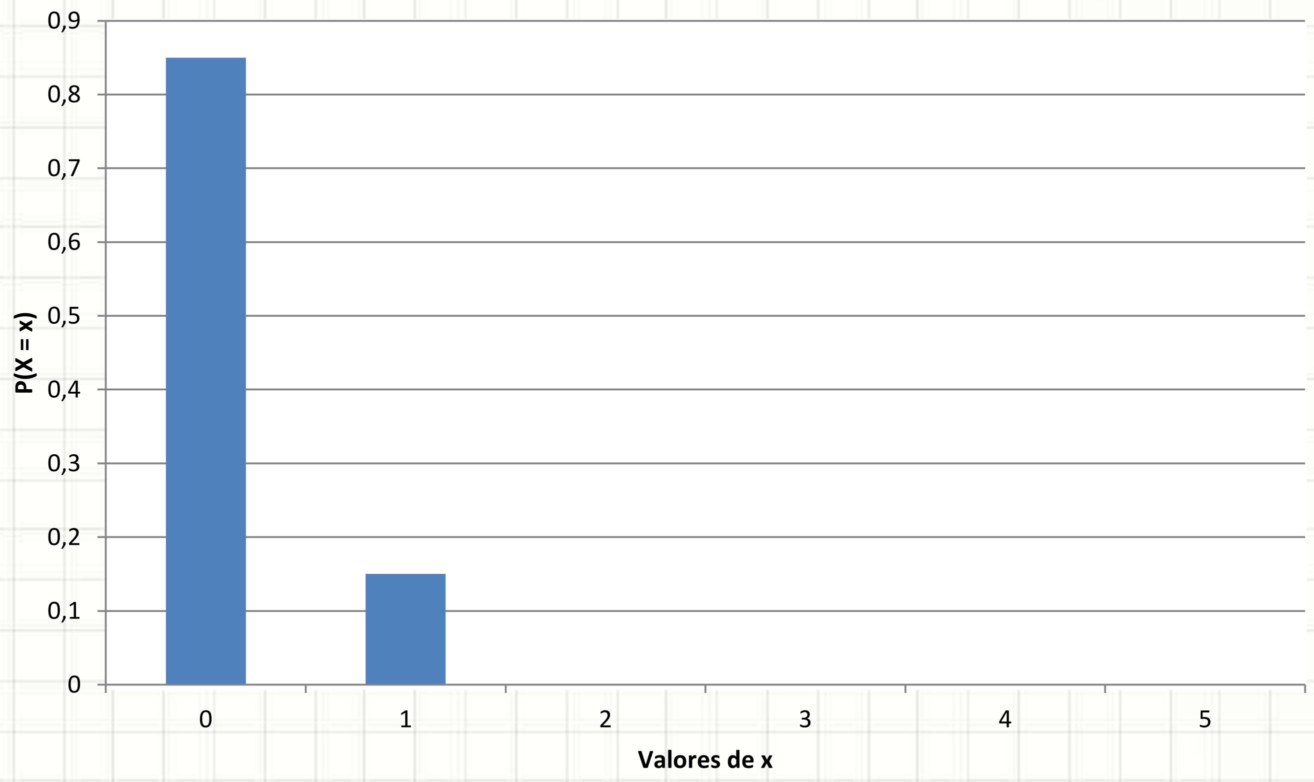
- Variável Aleatória de Bernoulli
  - Valor é 0 para fracasso ou 1 para sucesso
- Se a probabilidade de sucesso for **p**
  - $P(X = 1) = \mathbf{p}$
  - $P(X = 0) = 1-\mathbf{p}$

Exemplo:

- Se uma cirurgia tem 85% de chance de sucesso...
- Qual a chance de fracasso?
- A chance de fracasso é de 15%.

Distribuição de Bernoulli

- Graficamente, os resultados são assim:



Distribuição de Bernoulli

- Exemplo: ao entrar na UTI, a probabilidade de óbito de um paciente é de 20%. Seja X uma variável de bernoulli indicativa de óbito, calcule a distribuição de probabilidade, a média, a variância e o desvio padrão.

	X	P(X)	X.P(X)	$(X-\mu)^2.P(X)$
Sobreviveu	0	**0,8**	**0,0**	**0,032**
Óbito	1	**0,2**	**0,2**	**0,128**
	Total	**1,0**	**0,2**	**0,160**

Média: 0,2
Variância: 0,16
Desvio: 0,4

Distribuição de Bernoulli

- Equações Prontas para Bernoulli
  - $P(X = 1) = \mathbf{p}$
  - $P(X = 0) = 1\text{-}\mathbf{p}$
  - $\mu(X) = \mathbf{p}$
  - $\sigma^2(X) = \mathbf{p}.(1\text{-}\mathbf{p})$
  - $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2}$

Exemplo

P(X=1) = 0,2

P(X=0) = 0,8

Média: 0,2

Variância: 0,16

Desvio: 0,4

Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

- Quando repetimos sucessivamente experimentos independentes com apenas dois resultados
- X é variável que indica o número de sucessos
- Exemplos:
  - Jogo uma moeda 10x; probabilidade de 7 caras?
  - Jogo dado 3x; probabilidade de sair 2x a face 4?
  - Pego 100 peças na linha de produção; qual a probabilidade de 2 delas serem defeituosas?
  - ...

Distribuição Binomial

- Considerando a probabilidade **p** de sucesso e **(1-p)** de fracasso para cada experimento. Exemplo: ao jogar um dado, a probabilidade de sair 4 é 1/6, e de não sair é de 5/6
- Considerando que são **n** eventos e desejamos a probabilidade de **m sucessos**: exemplo: 3 lançamentos, 2 sucessos... (e 1 fracasso, portanto)
- A probabilidade sempre será uma composição das probabilidades de sucesso

Distribuição Binomial

- Probabilidade de 2x face 4 em 3 lançamentos
- p = 1/6, 1-p = 5/6, n = 3, X = 2
- A probabilidade sempre será composição das probabilidades de sucesso e fracasso:

$$P[(S \cap S \cap F) \cup (S \cap F \cap S) \cup (F \cap S \cap S)] =$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{5}{6} + \frac{1}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} + \frac{5}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} =$$

$$= 3.\left(\frac{1}{6}\right)^{2}.\left(\frac{5}{6}\right)^{1} = 0{,}069\%$$

Número de combinações ?

p x 1-p n-x

Distribuição Binomial - Combinações

- As combinações podem ser indicadas assim:

$$C_{r,p} = \binom{r}{p} = \frac{r!}{p!\,(r-p)!}$$

- Para os dados, 3 lançamentos x 2 sucessos:

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \ 3$$

$$P(X=2) = 3.\left(\frac{1}{6}\right)^{2}.\left(\frac{5}{6}\right)^{1} = 0{,}069\%$$

Distribuição Binomial

- Probabilidade de 2x face 4 em 3 lançamentos
- p = 1/6, 1-p = 5/6, n = 3, X = 2
- A probabilidade será:

$$p(X = 2) = 3.\left(\frac{1}{6}\right)^{2}.\left(\frac{5}{6}\right)^{1} = 0{,}069\%$$

C(n,x)   p   x   1-p   n-x

- Genericamente:

$$p(X = x) = C_{n,x}.\,p^{x}.\,(1 - p)^{(n-x)}$$

Distribuição Binomial

- Equações Prontas para Binomial
  - n: número de repetições independentes
  - p: probabilidade de sucesso em cada repetição
  - x: número de sucessos desejados

$$p(X = x) = C_{n,x}.p^{x}.(1-p)^{(n-x)}$$

$$\mu(X) = n.p$$

$$\sigma^2(X) = n.p.(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

Distribuição Binomial

- Exemplo: O gerente de uma loja estima que, de 10 vendas, 3 são microcomputadores e 7 são outros produtos. Qual a probabilidade de 1 das próximas 4 vendas seja um computador? Qual a média e o desvio padrão?

- n: **4**
- p: **0,3**
- x: **1**

$$p(X = x) = C_{n,x}.p^{x}.(1-p)^{(n-x)}$$

$$\mu(X) = n.p \qquad \sigma^2(X) = n.p.(1-p)$$

$$C_{4,1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 4$$

$$\mu(X) = 4.0,3 = 1,2$$

$$\sigma^2(X) = 4.0,3.(1-0,3) =$$

$$\sigma^2(X) = 0,84 \qquad \sigma(X) = 0,92$$

$$p(X = 1) = 4.0,3^{1}.(1-0,3)^{(4-1)}$$

$$p(X = 1) = 1,2.0,7^{3} = 0,4116$$

41,2%

Distribuição de Poisson

Distribuição de Poisson

- Quando o experimento mede ocorrências em um intervalo de tempo/espaço/volume e deseja saber a probabilidade de um número de ocorrências nesse intervalo
- X é variável que indica o número de sucessos
- Exemplos:
  - Defeitos por metro quadrado de tecido
  - Veículos que chegam no pedágio por hora
  - Acidentes por dia
  - ...

Distribuição de Poisson

- As condições para Poisson são:
  - Todas as ocorrências são independentes
  - A probabilidade de ocorrência é a mesma independente do intervalo.
- A distribuição de Poisson é definida pela média do processo: **λ**
  - λ é a taxa de ocorrência média no intervalo
  - Exemplos:
    - Em média 10 peças defeituosas de 500 por dia
    - Em média 200 carros por km de via.

Distribuição de Poisson

- Equações Prontas para Poisson
  - λ: taxa média de ocorrências no intervalo
  - k: número de ocorrências desejado.

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{k}}{k!}$$

$$\mu(X) = \lambda$$

$$\sigma^2(X) = \lambda$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$$

e é o número de Euler

e ~ 2,71828182846

Por serem eventos de Bernoulli, também podemos calcular a média como:

$$\lambda = n.p$$

Distribuição de Poisson

- Exemplo: probabilidade de ocorrer 3 defeitos em uma hora, com média de 4 defeitos por hora. Calcule a média e o desvio padrão
- k: **3**
- λ: **4**

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!} \quad \mu(X) = \lambda \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

$$p(X = 3) = \frac{e^{-4}.4^{3}}{3!} = \frac{0{,}018.64}{6} = 0{,}192 \quad \mathbf{19{,}2\%}$$

$$\mu(X) = 4$$

$$\sigma(X) = 2$$

Distribuição de Poisson

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!}$$

- Exemplo 2: Uma máquina produz 9 peças defeituosas em cada 1000 peças produzidas. Calcule a probabilidade de que um lote de 500 não contenha nenhuma defeituosa.
- k: **0**
- λ: $n.p = 500.0,009 = $ **4,5**

$$p(X = 0) = \frac{e^{-4,5}.4,5^{0}}{0!} = \frac{0,011.1}{1} = 0,011$$

$$\mathbf{1,1\%}$$

Conclusões

Resumo

- Modelos Discretos de Probabilidade
- Distribuição de Bernoulli
- Distribuição Binomial
- Distribuição de Poisson

- Modelos contínuos de probabilidade
  - Distribuição Normal

Perguntas?

Exercícios

Exercícios

- 1. Uma urna contém 15 bolas brancas e 25 bolas vermelhas. Uma bola é retirada ao acaso. Sabendo que X indica o número de bolas brancas retiradas, determine a média, variância e desvio padrão.

Exercícios

- 1. 15 bolas brancas e 25 bolas vermelhas
- Retirar bola ao acaso, X = número de brancas
- Média, variância e desvio padrão. **Bernoulli**
- p = 15/40 = 0,375
- $\mu = p =$ 0,375
- $\sigma^2 = p.(1-p) =$ 0,375.0625= 0,234375
- $\sigma =$ 0,484

Exercícios

- 2. A taxa de devoluções de pedidos de uma loja é de 13%. Considerando que 20 consumidores compraram, qual a probabilidade de que não mais que 1 consumidor faça devoluções?

Exercícios

$$p(X = x) = C_{n,x}.\, p^{x}.\,(1-p)^{(n-x)}$$

- 2. 13% de devoluções
- 20 compras, probabilidade de X = devoluções
- P(X≤1) **Binomial!**
- n: **20**
- p: **0,13**
- x: **0 e 1**

$$C_{20,0} = \frac{20!}{0!\,(20-0)!} = 1$$

$$p(X = 0) = 1.\,0{,}13^{0}.\,(1-0{,}13)^{(20-0)}$$

$$p(X = 0) = 0{,}062$$

$$C_{20,1} = \frac{20!}{1!\,(20-1)!} = 20$$

$$p(X = 1) = 20.\,0{,}13^{1}.\,(1-0{,}13)^{(20-1)}$$

$$p(X = 1) = 0{,}184$$

$$p(X \le 1) =$$

$$= 0{,}062 + 0{,}184 =$$

$$p(X \le 1) = 0{,}246$$

Exercícios

- 3. O gerente de controle de qualidade da Nestlé está inspecionando um lote de biscoitos com gotas de chocolate que acabou de ser assado. O número médio de gotas de chocolate por biscoito é 4.

a) Qual a probabilidade de serem encontradas menos que 3 gotas em um biscoito?

Exercícios

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{k}}{k!}$$

- 3. Média de gotas na área do biscoito: 4.

a) Qual a probabilidade de serem encontradas menos que 3 gotas em um biscoito? **Poisson**

- λ: **4**
- ks: **0,1 e 2**

$$p(X = 0) = \frac{e^{-4}.4^{0}}{0!} = 0{,}018$$

$$p(X = 1) = \frac{e^{-4}.4^{1}}{1!} = 0{,}073$$

$$p(X = 2) = \frac{e^{-4}.4^{2}}{2!} = 0{,}147$$

$$p(X \leq 2) = 0{,}018 + 0{,}073 + 0{,}147 = 0{,}238$$

$$\mathbf{23{,}8\%}$$

Exercícios

- 3. O gerente de controle de qualidade da Nestlé está inspecionando um lote de biscoitos com gotas de chocolate que acabou de ser assado. O número médio de gotas de chocolate por biscoito é 4.

b) Qual a probabilidade de serem encontradas 3 ou mais gotas em um biscoito?

Exercícios

$$p(X = k) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{k}}{k!}$$

- 3. Média de gotas na área do biscoito: 4.

b) Qual a probabilidade de serem encontradas 3 ou mais gotas em um biscoito?

Poisson

- λ: **4**
- ks: **3,4,5...**

Todos os que não forem 0, 1, 2....

$$p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - 0{,}238 = 0{,}762$$

$$\mathbf{76,2\%}$$