



# **MECÂNICA DOS SÓLIDOS**

## **MOMENTOS E O EQUILÍBRIO DOS CORPOS RÍGIDOS**

Prof. Dr. Daniel Caetano

2020 - 1

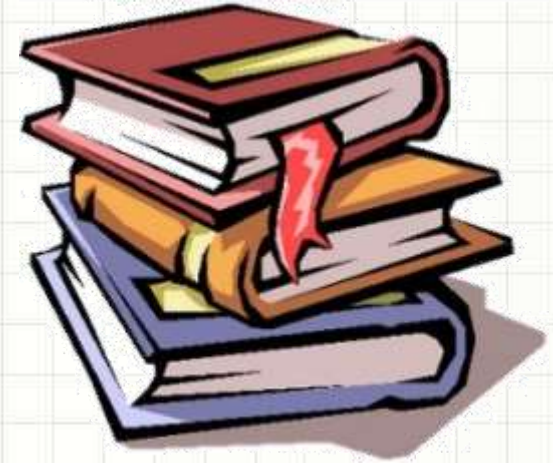
# Objetivos

- Conceituar Momento de uma Força
- Habilitar para o cálculo de momentos
- Conhecer os graus de liberdade de um corpo
- Compreender as condições de equilíbrio de corpo rígido

- **Atividade Aula 2 – SAVA!**




# Material de Estudo



---

<b>Material</b>	<b>Acesso ao Material</b>
Apresentação	<a href="http://www.caetano.eng.br/">http://www.caetano.eng.br/</a> (Mecânica dos Sólidos – Aula 2)
Material Didático	Mecânica Geral (MACIEL), Cap. 2 (SAVA)
Biblioteca Virtual	Estática e Mecânica dos Materiais (BEER;JOHNSTON), Cap. 4
Material Adicional	Estática (HIBBELER), Cap 5.

---



**RELEMBRANDO:**

# **EQUILÍBRIO DE FORÇAS E MOMENTOS**

# Equilíbrio de Forças

- **Resultante é 0** em uma dada direção?
  - Então **há equilíbrio** de forças naquela direção!

Condição de  
Equilíbrio

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0$$



**Se equilibram!**

- Equilíbrio significa “parado”?
  - “Sem alterar estado de movimento” na direção!

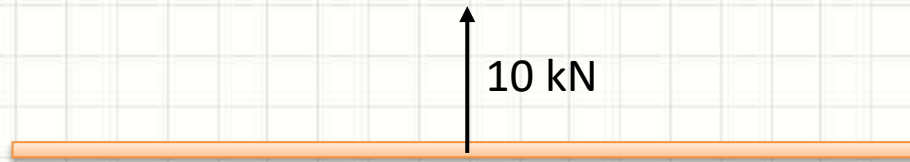


**MOTIVAÇÃO:**

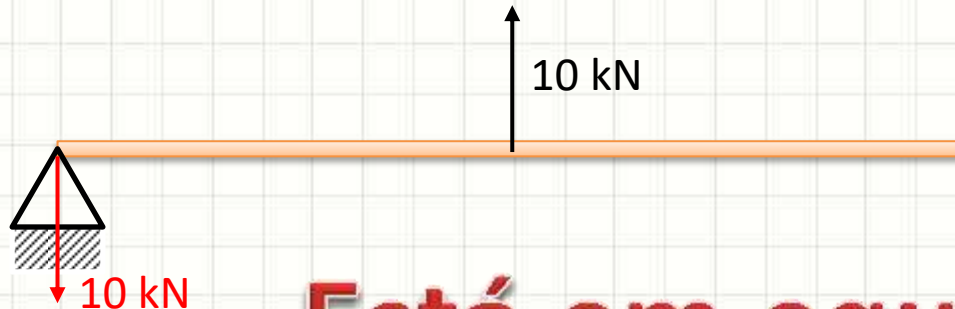
# **EQUILÍBRIO EM BARRAS**

# Equilíbrio em Barras

- O que acontece com essa barra?  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$



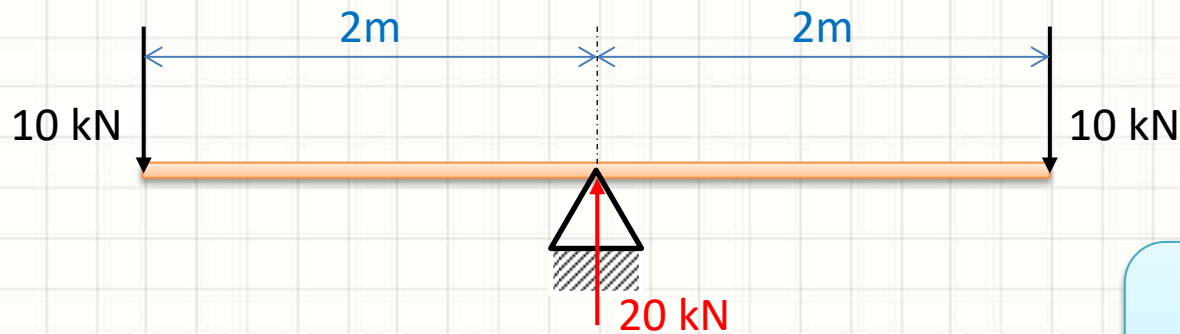
- E se ela estiver presa em uma articulação?



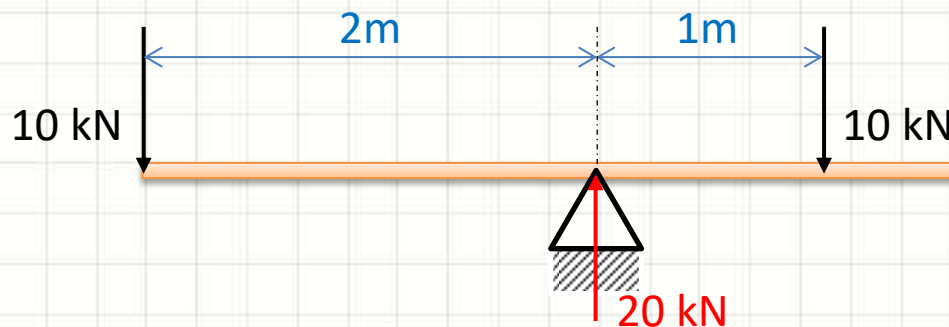
**Está em equilíbrio?**

# Equilíbrio em Barras

- E nesse outro caso?



- E agora?

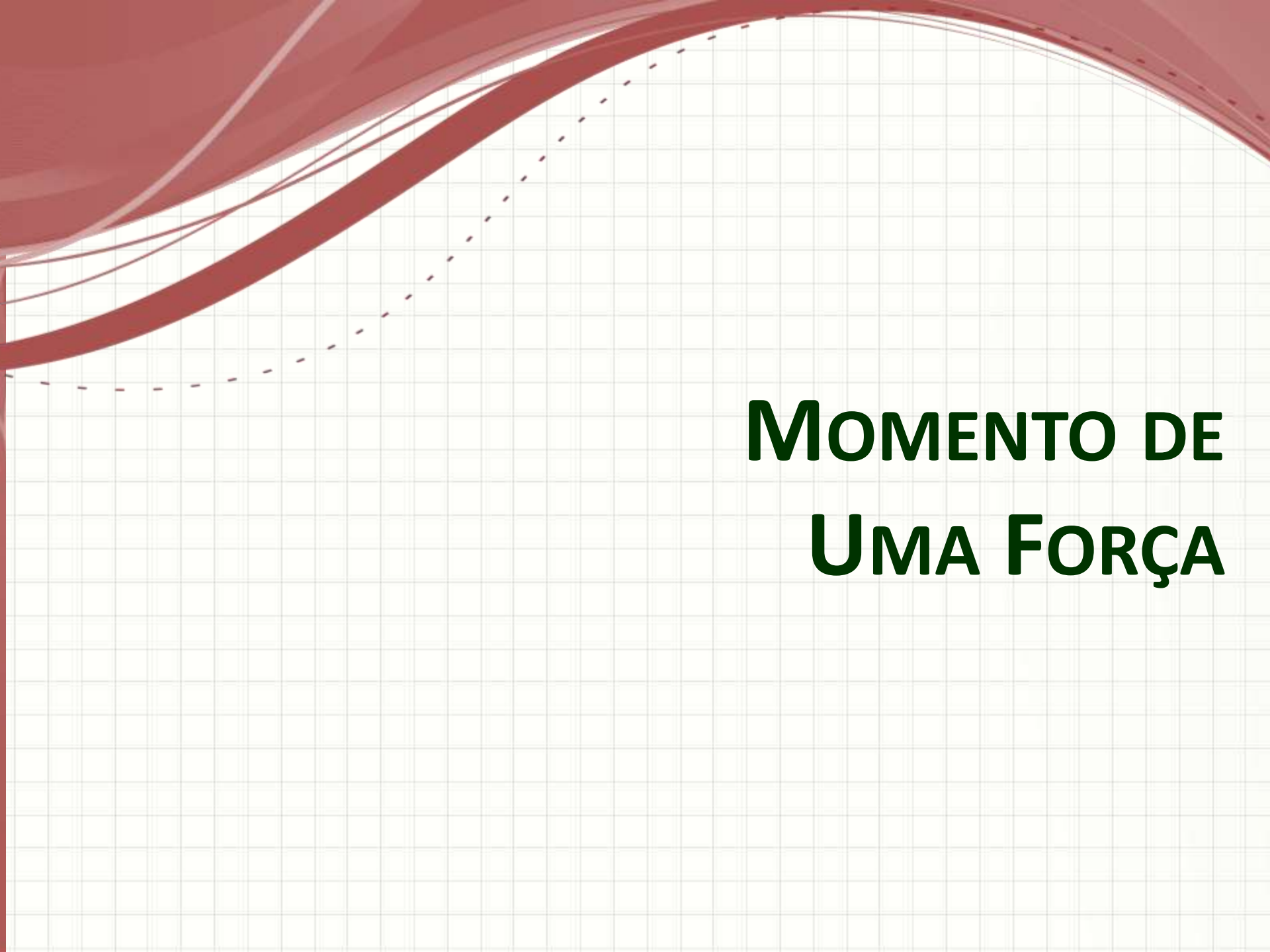


Condição de  
Equilíbrio

$$\vec{R}_X = \sum \vec{F}_X = 0$$

$$\vec{R}_Y = \sum \vec{F}_Y = 0$$

**Parece que, para barras\*, as condições que vimos não são suficientes!**



# **MOMENTO DE UMA FORÇA**

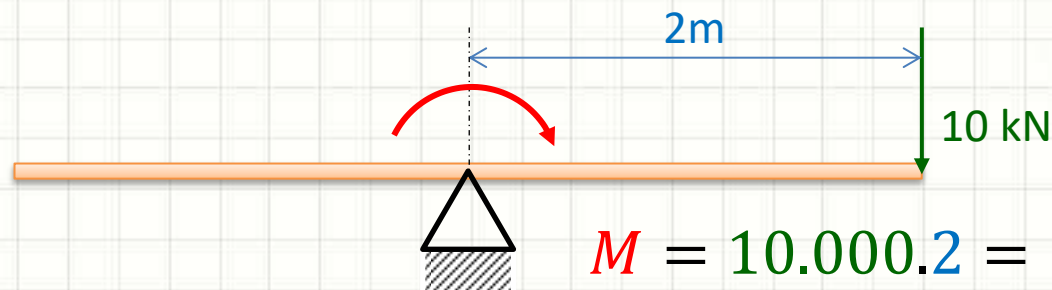
# Momento de uma Força

- O **momento de uma força** em relação a um ponto nos dá a medida com que aquela força provoca uma **rotação ao redor do ponto**
- O momento é proporcional à:

- Força

$$M = F \cdot d$$

- Distância da linha de ação da força ao ponto



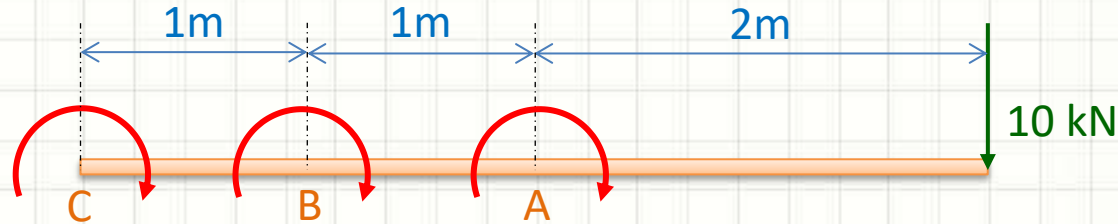
$$M = 10.000.2 = 20 \text{ kN.m}$$

- A unidade do *momento* é **N.m**

# Momento de uma Força

- O momento varia de acordo com o ponto!

$$M = F \cdot d$$



$$M_A = 10.000 \cdot 2 = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_B = 10.000 \cdot (2 + 1) = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C = 10.000 \cdot (2 + 1 + 1) = 40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

# Momento de uma Força

- A distância **d** deve ser sempre medida *perpendicularmente* à força  $M = F \cdot d$



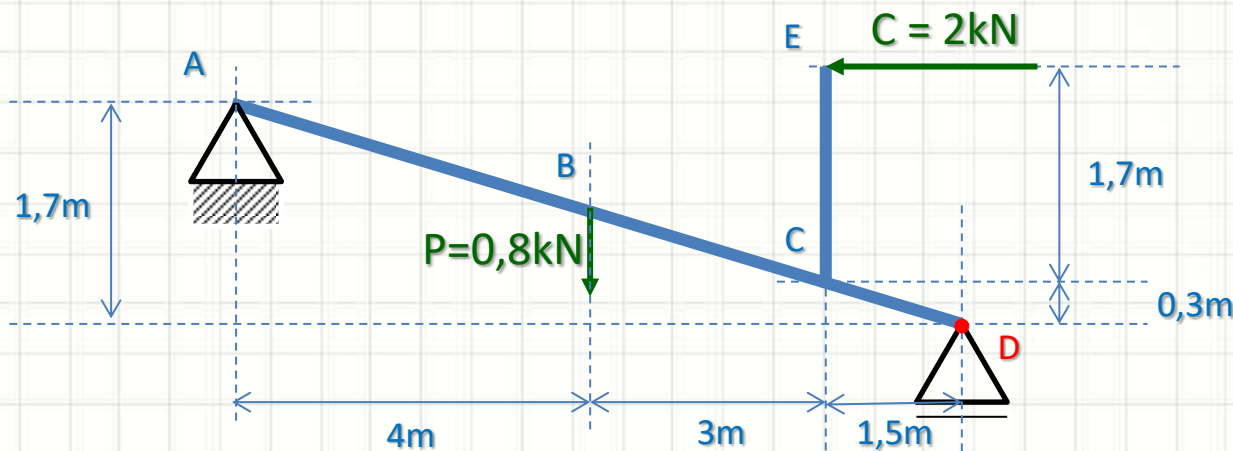
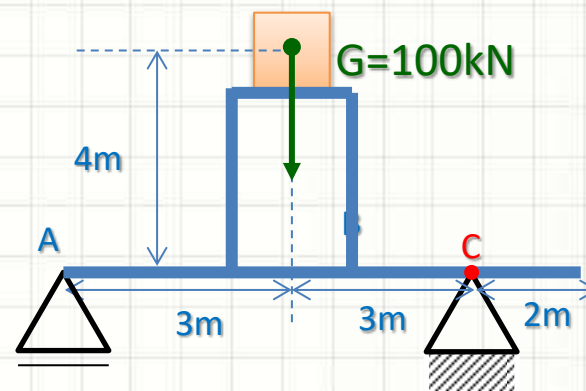
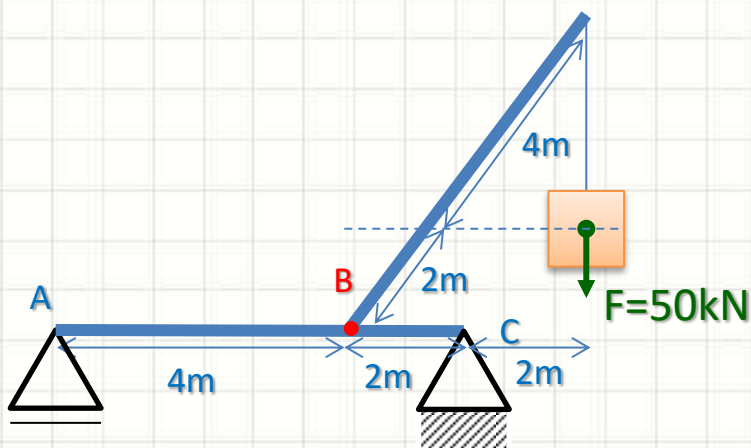
- Se a linha de ação passa pelo ponto...



O momento será zero:  $M = 0!$

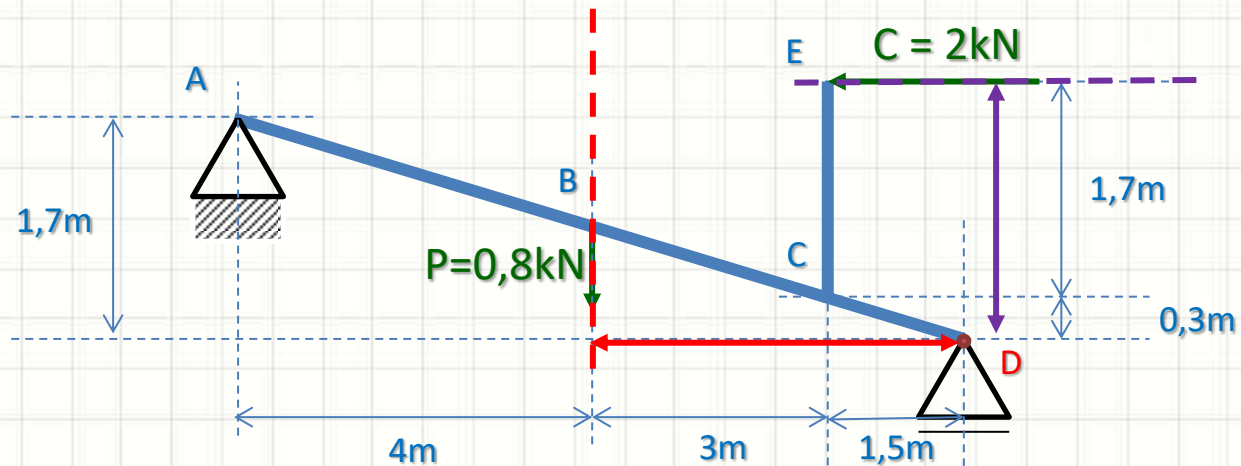
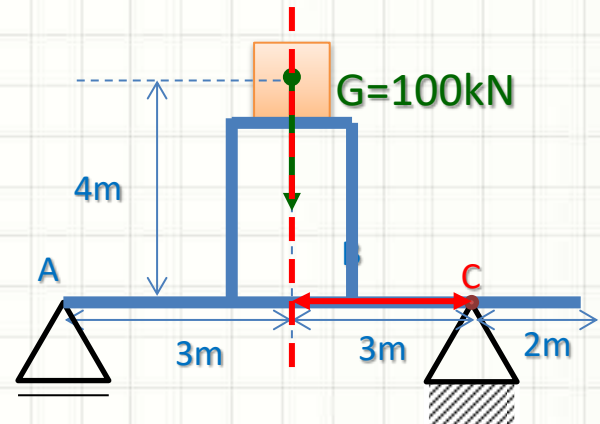
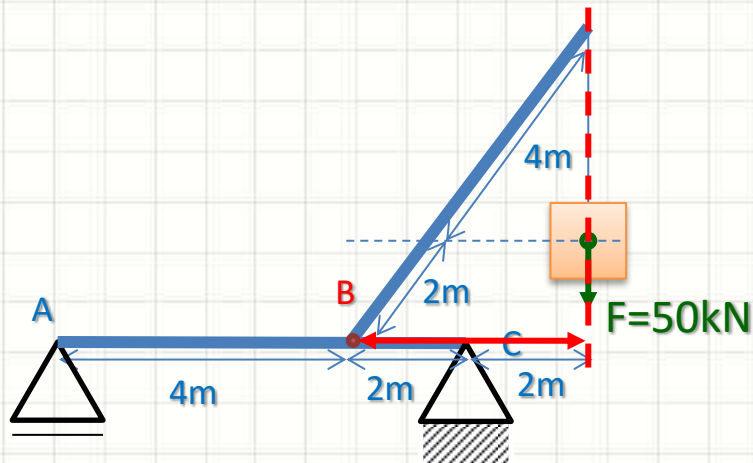
# Exercício


- Qual a distância para o cálculo do momento?



# Exercício

- Qual a distância para o cálculo do momento?





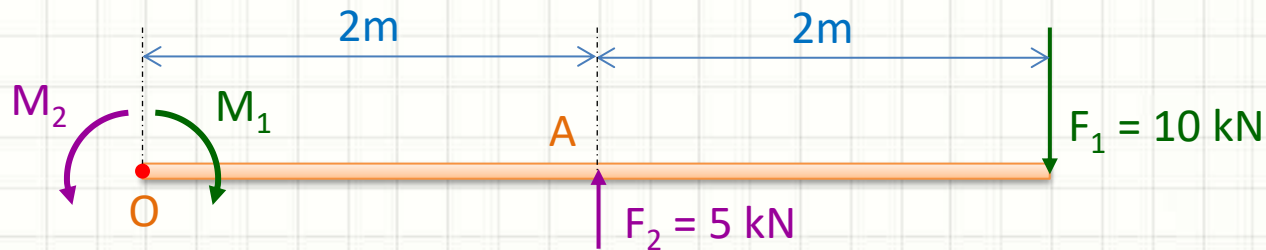
# **MOMENTO RESULTANTE**

# Momento Resultante

- Se há várias forças agindo, pode-se calcular o **momento resultante** dessas forças para um ponto qualquer da barra:

$$\vec{M}_R = \sum \vec{M}$$

 Sentido positivo!



$$M_1 = 10.000.4 = 40 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 5.000.2 = 10 \text{ kN.m}$$

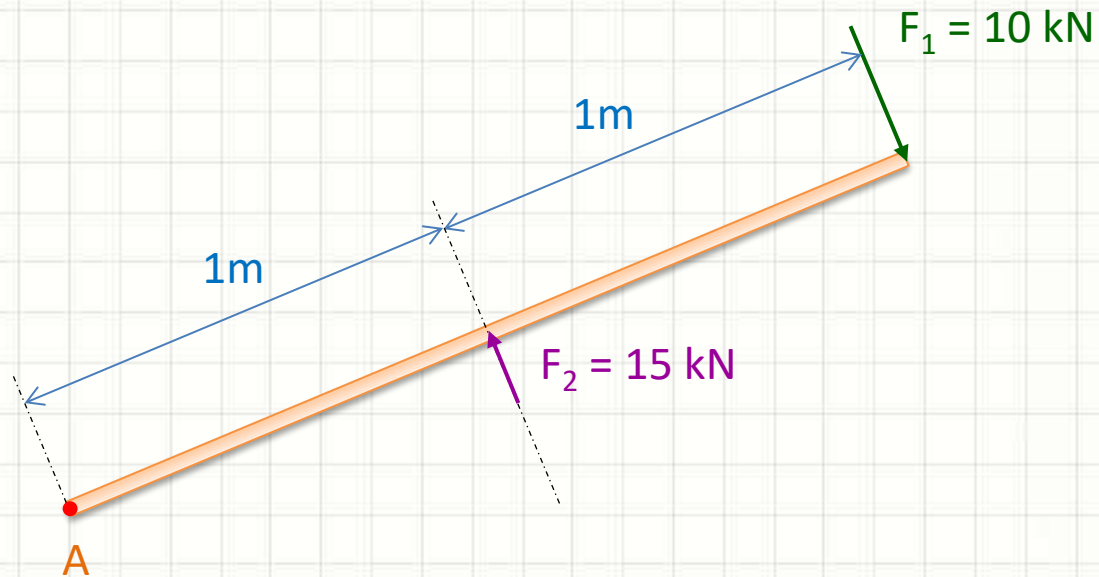
$$M_O = M_1 - M_2$$

$$M_O = 40.000 - 10.000$$

$$M_O = 30 \text{ kN.m}$$

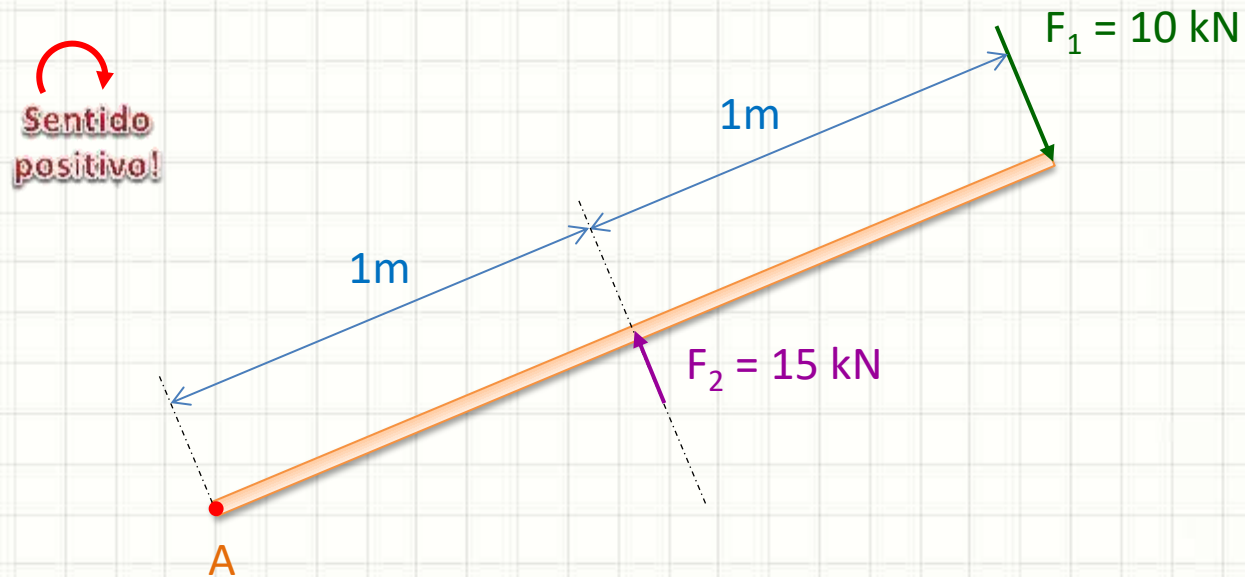
# Exercício

- Calcule o Momento Resultante em A



# Exercício

- Calcule o Momento Resultante em A

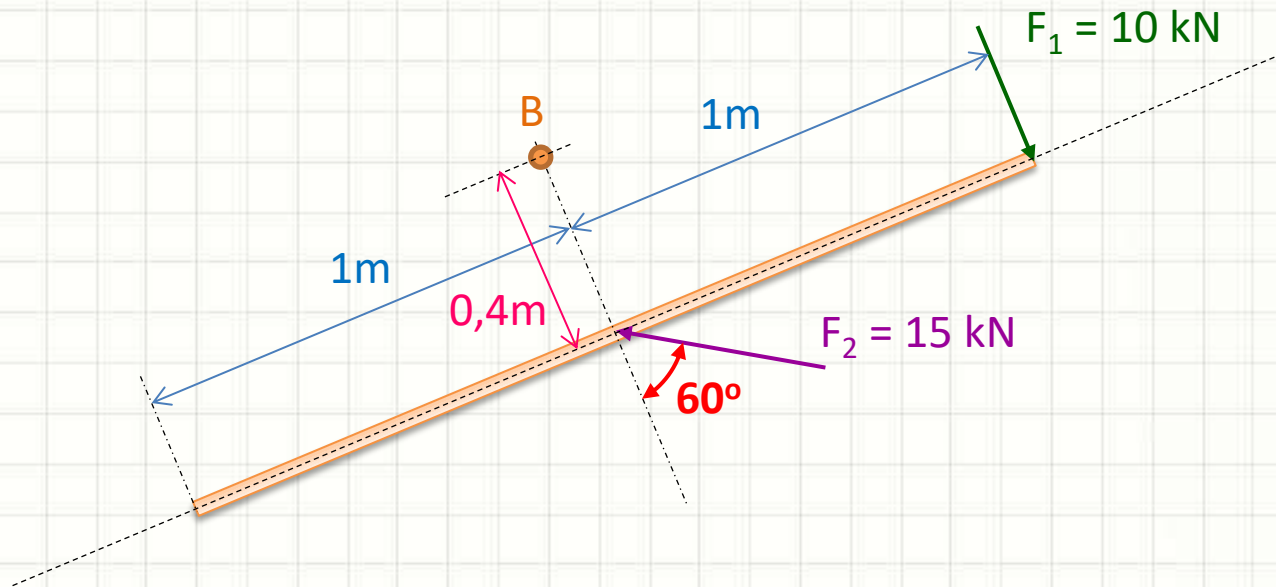


$$MR_A = \sum M_A = +10000 \cdot 2 - 15000 \cdot 1$$

$$MR_{RA} = +5 \text{ kN.m}$$

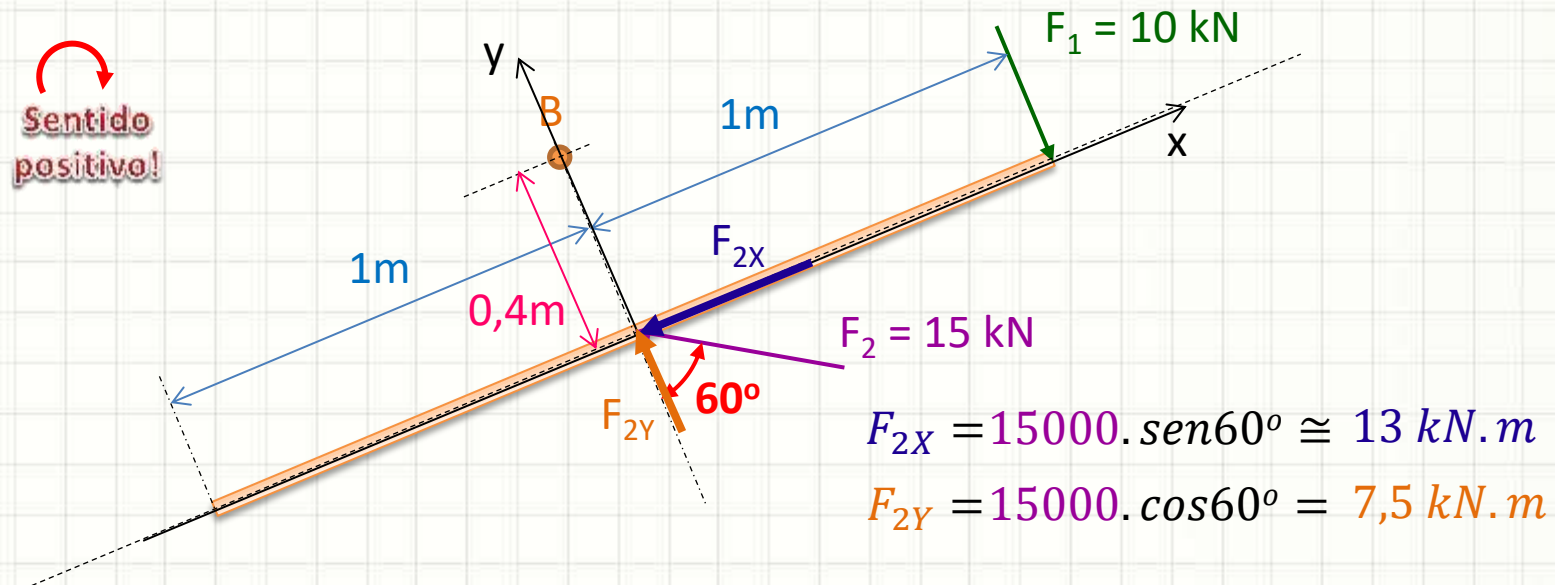
# Exercício

- Calcule o Momento Resultante em B



# Exercício

- Calcule o Momento Resultante em B



$$MR_B = \sum M_B = +10000 \cdot 1 + 13000 \cdot 0,4 + 7500 \cdot 0$$

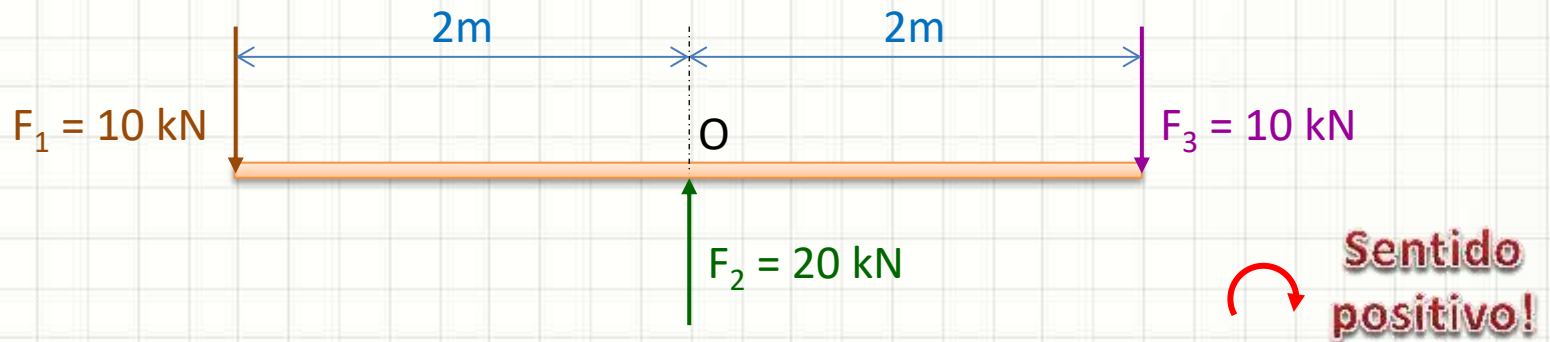
$$MR_B = +15,2 \text{ kN.m}$$



# **EQUILÍBRIO DE MOMENTOS**

# Equilíbrio de Momentos

- Calculemos o momento resultante em O



$$M_1 = 10.000.2 = 20 \text{ kN.m}$$

$$M_2 = 20.000.0 = 0 \text{ kN.m}$$

$$M_3 = 10.000.2 = 20 \text{ kN.m}$$

$$\overrightarrow{MR_O} = \sum \vec{M}$$

$$MR_O = -M_1 + M_2 + M_3$$

$$MR_O = -20.000 + 0 + 20.000$$

$$MR_O = 0 \text{ kN.m}$$

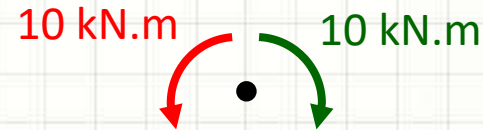
**Os momentos estão em equilíbrio!**

# Equilíbrio de Momentos

- **Momento resultante é zero** em um ponto?
  - **Há equilíbrio** de momentos!

Condição de Equilíbrio  
de Momentos

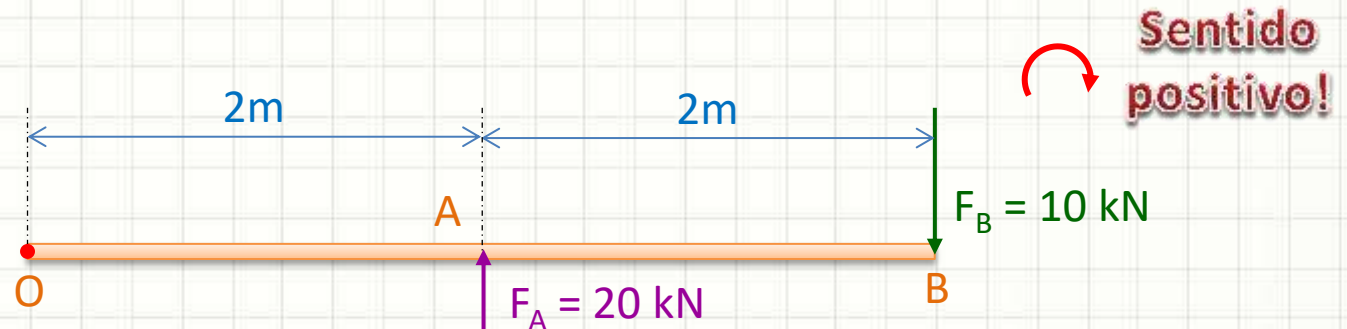
$$\overrightarrow{MR_P} = \sum \overrightarrow{M_P} = 0$$



- Equilíbrio significa “parado”?
  - “Não alterar o estado de giro” no plano!

# Exemplo

- Verifique se há equilíbrio de momentos em O



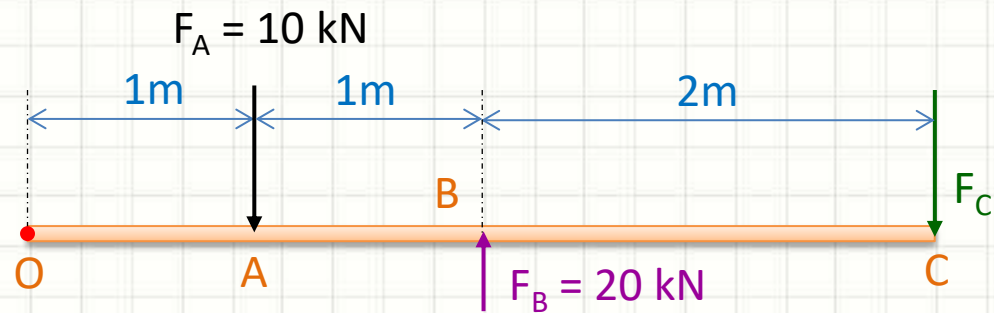
$$MR_O = \sum M_O = -20000 \cdot 2 + 10000 \cdot 4$$

$$MR_O = 0 \text{ N.m}$$

**Em equilíbrio!**

# Exercício

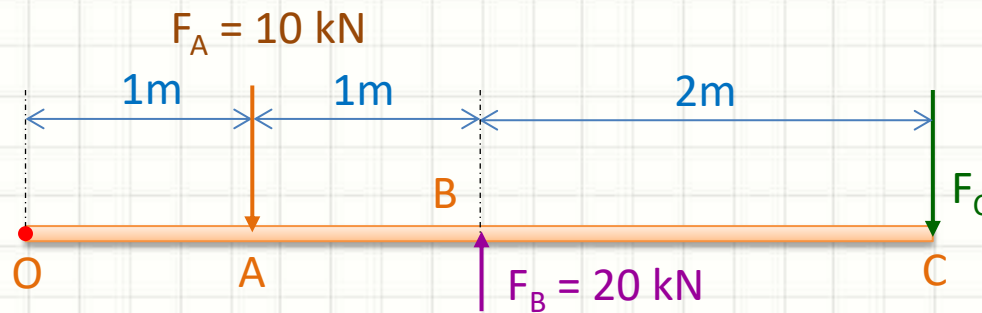
- Determine a força que deveria haver em  $F_C$  para que haja equilíbrio em O



# Exercício

- Determine a força que deveria haver em  $F_C$  para que haja equilíbrio em O

Sentido positivo!



$$MR_O = \sum M_O = 0$$

$$MR_O = +10000 \cdot 1 - 20000 \cdot 2 + F_C \cdot 4 = 0$$

$$-30000 + 4 \cdot F_C = 0$$

$$+4 \cdot F_C = 30000$$

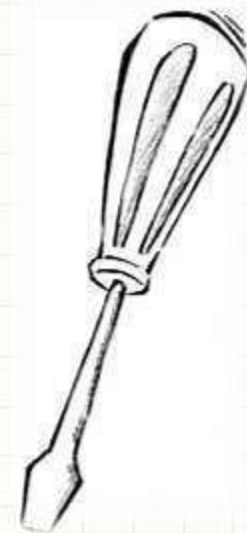
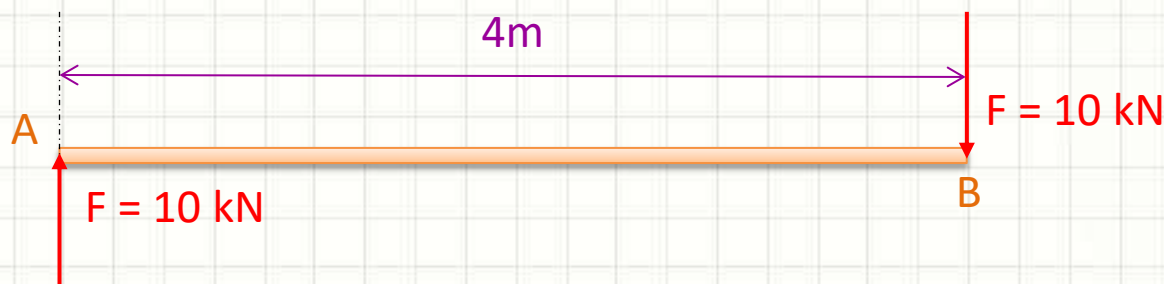
$$F_C = 7500$$



# **MOMENTO DE UM BINÁRIO**

# Momento de um Binário

- Um binário é uma situação em que são aplicadas, em um elemento, **duas forças de igual intensidade, mesma direção e sentidos opostos**:



- Nesse caso:  $M_R = F \cdot \text{braço}$ 
  - $M_R$  será **constante** em qualquer ponto da barra!

# Exemplo

- Qual é o momento em O?

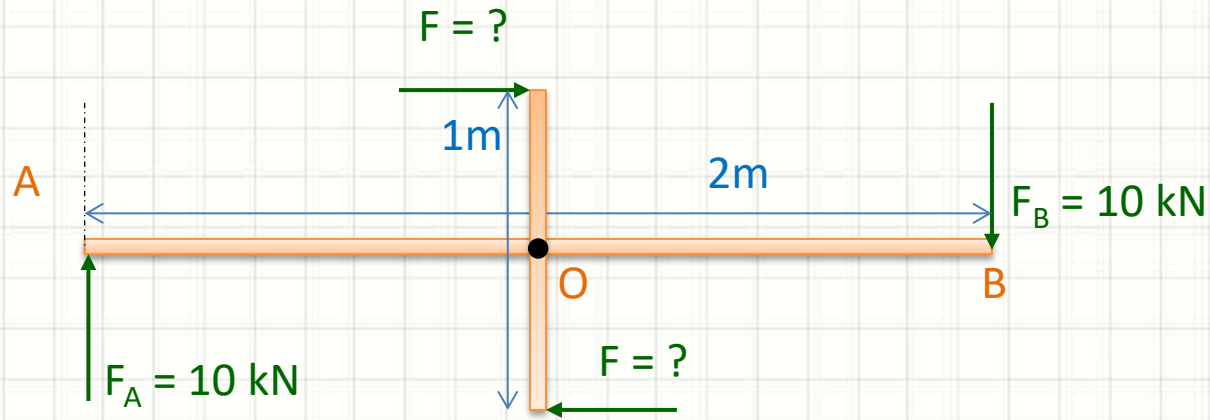


$$MB_O = +30000 \cdot 10 = 300 \text{ kN.m}$$

 **Sentido positivo!**

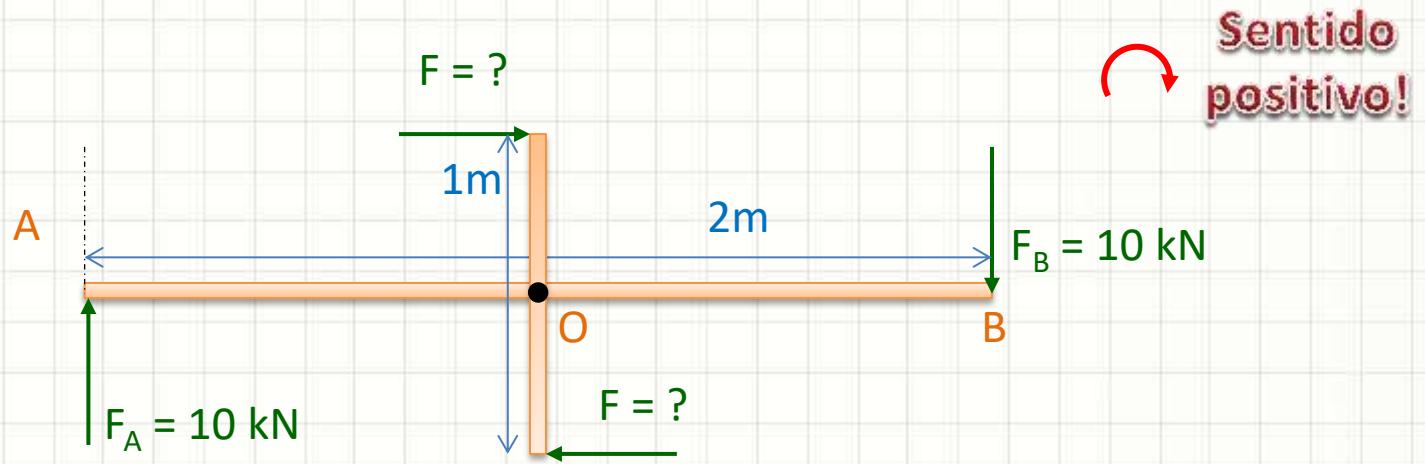
# Exercício

- Qual valor  $F$  permite remover os esforços  $F_A$  e  $F_B$  mantendo o mesmo momento binário?



# Exercício

- Qual valor  $F$  permite remover os esforços  $F_A$  e  $F_B$  mantendo o mesmo momento binário?



$$MB_O = +10000 \cdot 2 = 20\text{ kN.m}$$

$$MB_O = 20000\text{ N.m} = +F \cdot 1 \Rightarrow \boxed{+F = 20000\text{ N.m}}$$



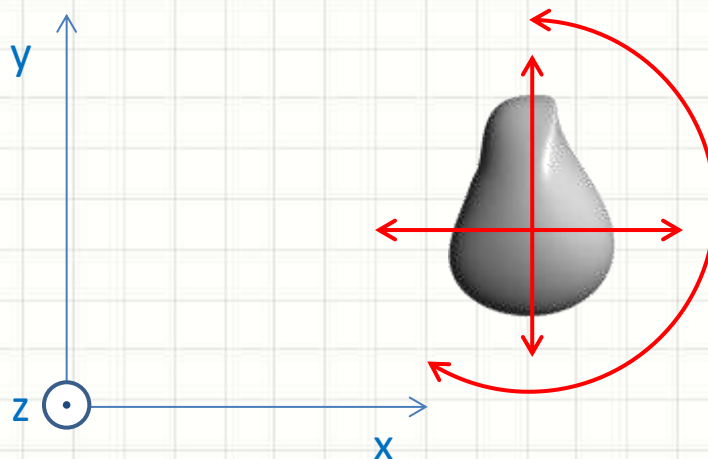
PARA ENTENDER O EQUILÍBRIO:

# **GRAUS DE LIBERDADE DE UM CORPO RÍGIDO**

# Movimentos Possíveis

- Corpo livre: quantos tipos de movimento?
- Começemos por um mundo bidimensional
  - Translação horizontal
  - Translação vertical
  - Rotação no plano (ao redor de z)

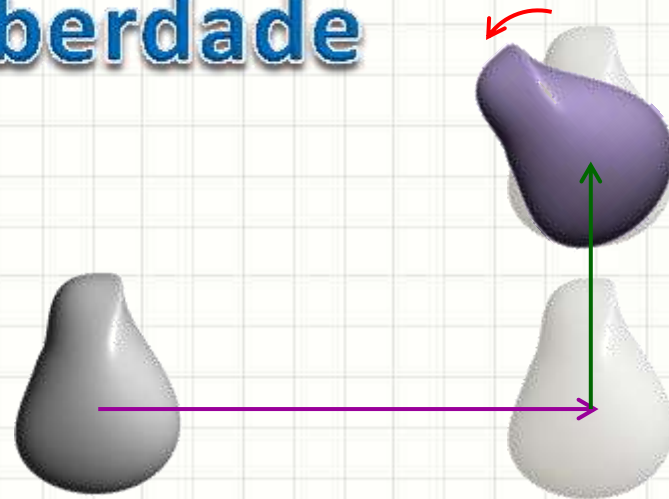
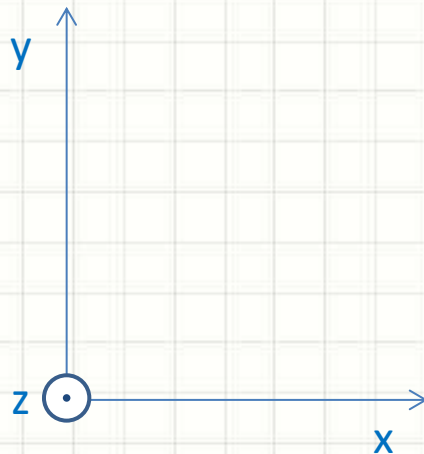
**O que  
significa?**



# Posicionamento do Corpo

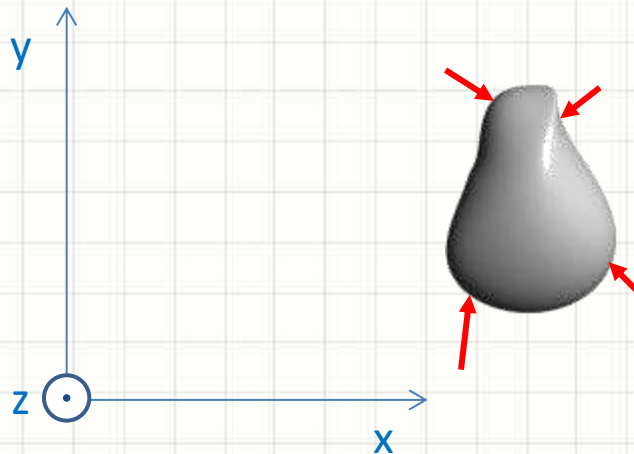
- Pode-se atingir qualquer posição...
  - Com 3 movimentos
- Quais sejam:
  - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**

## 3 Graus de Liberdade



# Foças x Graus de Liberdade

- Corpo sob a ação de forças externas:
  - Pode ser movido dessas três maneiras
  - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**
- Como saber se o corpo está em equilíbrio?
  - Qual deve ser o valor das resultantes?

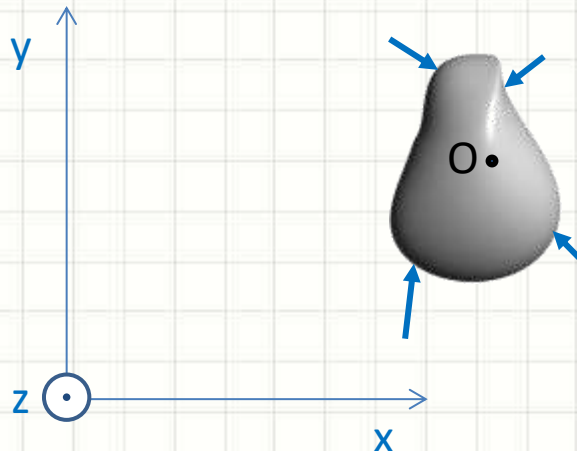




# **CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DE UM CORPO RÍGIDO**

# Equilíbrio de Corpo Rígido

- Primeiro, vamos formalizar um corpo rígido
  - É um corpo em que todos os pontos que o compõem são solidários entre si
- Ou seja, para verificar o equilíbrio de um corpo rígido, basta verificar o que acontece em um ponto arbitrário do mesmo



# Equilíbrio de Corpo Rígido

- Para equilíbrio, forças não devem provocar:
  - Translação **horizontal**, **vertical** e **rotação**
- Ou seja, equilíbrio: resultantes zero

Condição de  
Equilíbrio em X

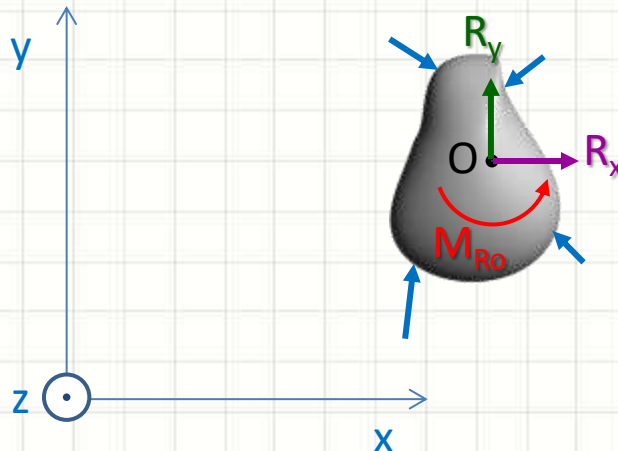
$$R_x = \sum F_x = 0$$

Condição de  
Equilíbrio em Y

$$R_y = \sum F_y = 0$$

Condição de  
Equilíbrio de Momentos

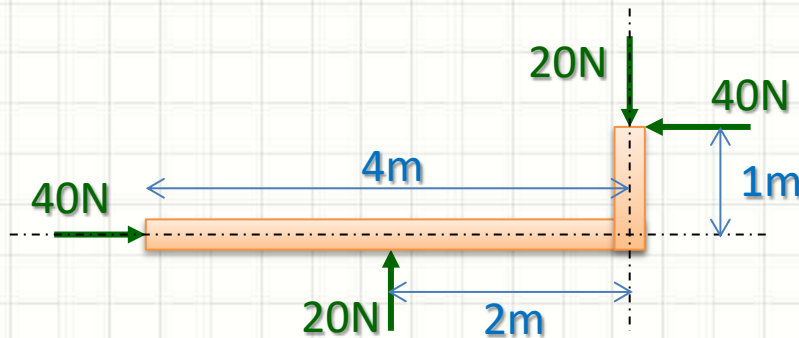
$$M_{Ro} = \sum M_o = 0$$



# Exemplo

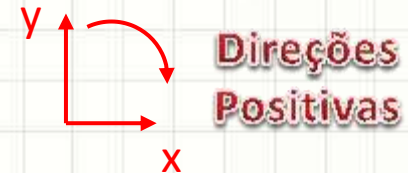
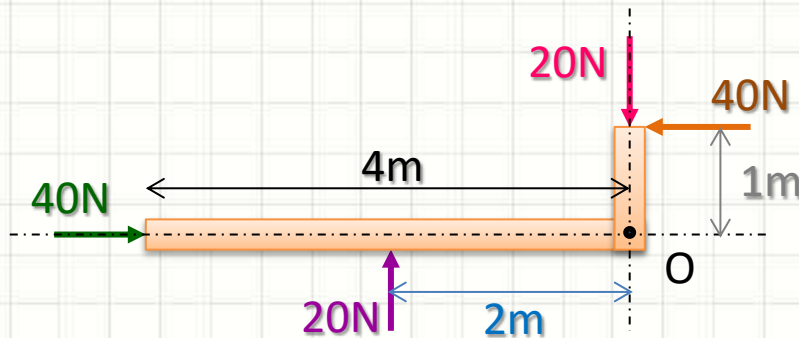
Calcule o valor da resultante e verifico se é zero!

- Verifique se está em **equilíbrio** estático



# Exemplo

- Verifique se está em equilíbrio estático



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +40 - 40 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

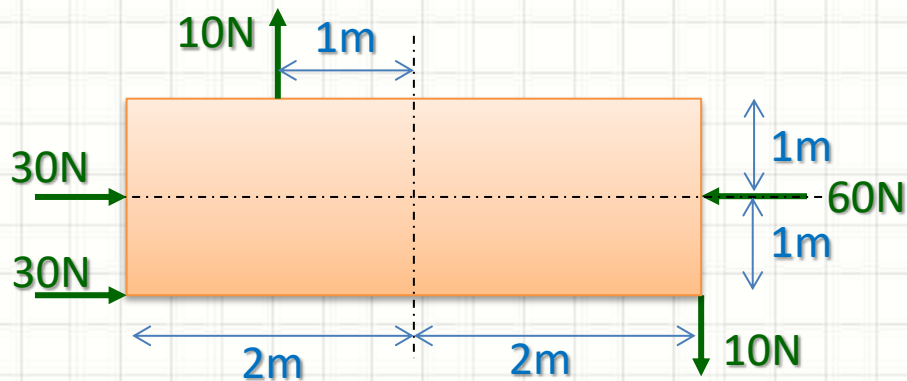
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +20 - 20 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(20 \cdot 2) - (40 \cdot 1) = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

Corpo em  
Equilíbrio!

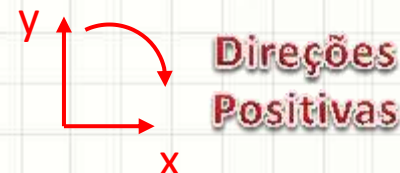
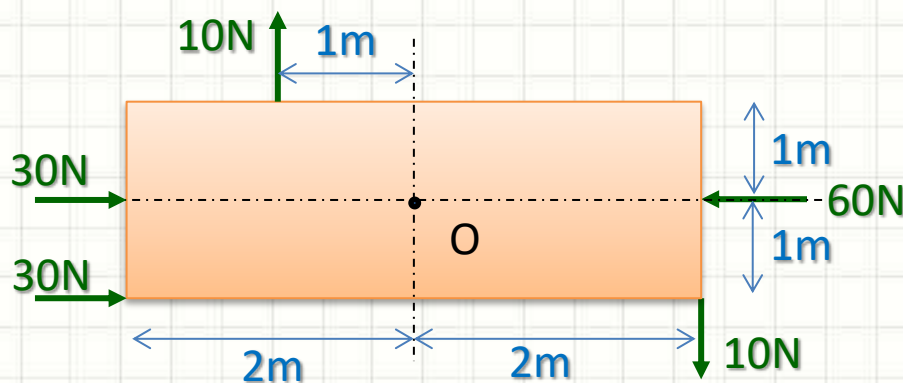
# Exercício

- Verifique se está em **equilíbrio estático**



# Exercício

- Verifique se está em **equilíbrio estático**



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +30 + 30 - 60 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +10 - 10 = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

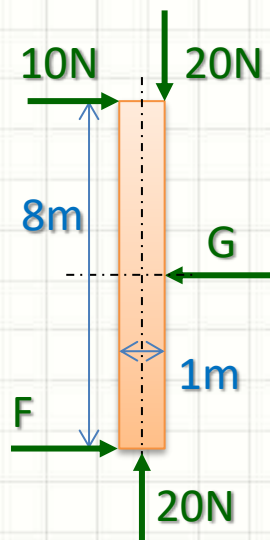
$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(30 \cdot 0) - (30 \cdot 1) + (10 \cdot 2) + (60 \cdot 0) + (10 \cdot 1) = 0 \quad ? \quad \text{Ok!}$$

**Corpo em  
Equilíbrio!**

# Exercício

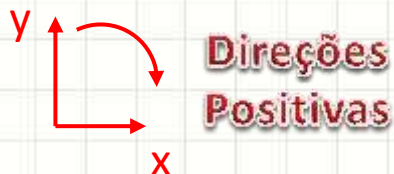
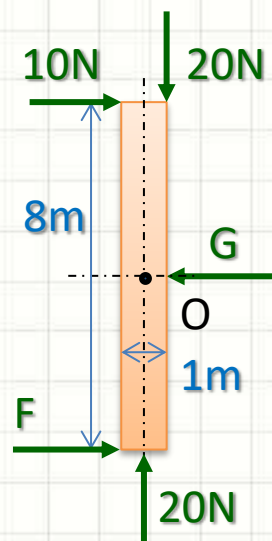
Construo a equação de equilíbrio obrigando seu valor ser zero e calculo as variáveis

- Qual os valores de  $F$  e  $G$  para equilíbrio?



# Exercício

- Qual os valores de  $F$  e  $G$  para equilíbrio?



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +10 + F - G = 0 \quad \Rightarrow G = F + 10$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -20 + 20 = 0$$

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow +(10 \cdot 4) + (20 \cdot 0,5) + (G \cdot 0) + (20 \cdot 0) - (F \cdot 4) = 0$$

$$\Rightarrow 40 + 10 - 4F = 0 \quad \Rightarrow F = 12,5N$$

$$\therefore G = 22,5N$$



# CONCLUSÕES

# Resumo

- Equilíbrio de Momentos
  - Binário de Forças
  - Graus de liberdade: movimentos possíveis
  - Corpos Rígidos: partículas solidárias
  - Equilíbrio do Corpo: forças e momentos
  - **TAREFA:** Exercícios Aula 2
- 

- Diagramas de Corpo Livre
  - Vínculos
  - Cálculos de reações!



**PERGUNTAS?**