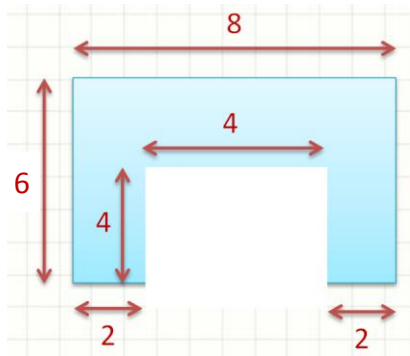


Exercício - Aula 1 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos percebam a importância do momento estático como uma forma de determinar o centroide de uma área, medida que será de fundamental importância ao longo deste curso. É importante organizar a solução, por existem sempre muitos caminhos, alguns são substancialmente mais longos que outros.

O problema é apresentado com a figura abaixo:



Pede-se: **Calcule a posição do centroide da área azul.**

Bem, por onde começar?

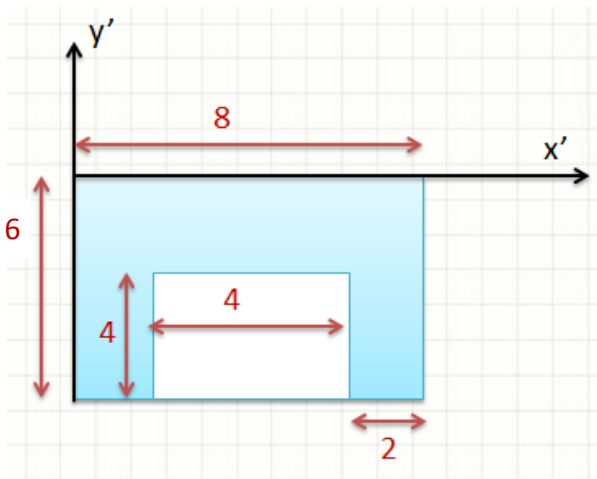
Se tivéssemos um eixo qualquer, poderíamos calcular a distância dele para o centroide através do cálculo do momento estático; a distância d até o centroide seria o momento estático da figura em relação a esse eixo dividido pela área da figura; em outras palavras: $d = S/A$.

Como o centroide é um ponto, precisaríamos não de um, mas de dois eixos para que fosse possível localizar a posição do mesmo.

Determinando Eixos de Referência Iniciais

É certo que não temos esses eixos, mas nada nos impede de coloca-los onde nos interessar. O aluno precisa se acostumar a escolher a localização de eixos de referência.

Antes de mais nada, vamos usar um par de eixos de referência: x' e y' , conforme indicado abaixo. Eles serão nossos eixos iniciais para o cálculo do momento estático.



Cálculo da Posição X_g do Centróide

O primeiro passo é determinar a posição X_g onde se encontra o centróide.

Poderíamos calcular o momento estático da área em relação ao eixo y' e, dividindo este valor pela área da figura, teríamos a posição X_g (contando a partir de y').

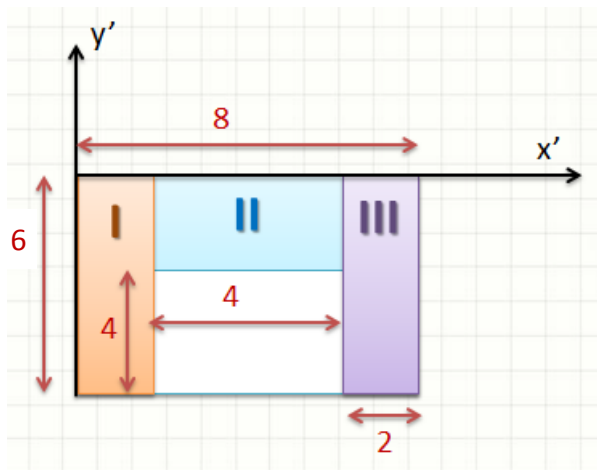
No entanto, é fácil perceber que a figura possui uma simetria: é possível traçar um eixo y paralelo a y' que divida a figura em duas partes idênticas (porém espelhadas). Como eixos de simetria passam pelo centróide, este eixo y estaria na posição X_g !

Ora, se a figura será cortada em duas metades idênticas, este eixo deve estar centralizado em sua largura: a figura tem 8 de largura e, sendo assim, o eixo y deve passar pela posição $x = 4$, que é exatamente a posição X_g .

Cálculo da Posição Y_g do Centróide

Já a posição do eixo x – ou seja, o Y_g – é um pouco mais complicada de se obter, já que a figura não tem simetria com relação a nenhum eixo paralelo a x' . Sendo assim, não escaparemos de calcular o momento estático com relação ao eixo x' para, dividindo este valor pela área total da figura, descobrirmos a posição do Y_g .

Há diversas formas de calcular o momento estático da área mas, como o eixo x' foi posicionado convenientemente, uma forma prática é “picotando” a figura em diferentes retângulos cujo momento estático é calculado diretamente, pela fórmula $(b * h^2)/2$:



$$S_{xI} = S_{xIII} = (b * h^2) / 2 = (2 * 6^2) / 2 = 6^2 = 36$$

$$S_{xII} = (b * h^2) / 2 = (4 * 2^2) / 2 = 2 * 4 = 8$$

$$S_x = S_{xI} + S_{xII} + S_{xIII} = -36 - 8 - 36 = -80 \quad \Rightarrow \text{Negativos: estão no 4º quadrante!}$$

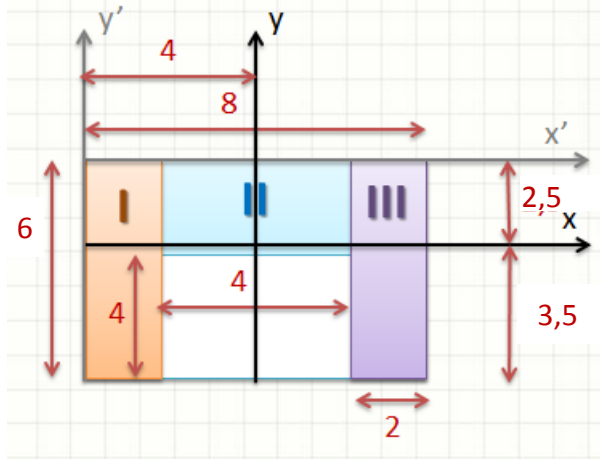
Para calcular a altura do eixo X ainda precisamos da área da figura, que nada mais é que:

$$A = A_I + A_{II} + A_{III} = 2*6 + 2*4 + 2*6 = 12 + 8 + 12 = 32$$

Logo, a posição do eixo **X** pode ser calculada com a expressão:

$$Y_g = S_x / A = -80 / 32 = -2,5$$

Assim, podemos indicar os eixos que passam pelo centroide da figura:



Parece muita coisa? Nem tanto. Na página seguir encontra-se a solução apenas com os cálculos:

Exercício - Aula 1 – Solução (apenas Cálculos)

Cálculo da Posição do Centroide

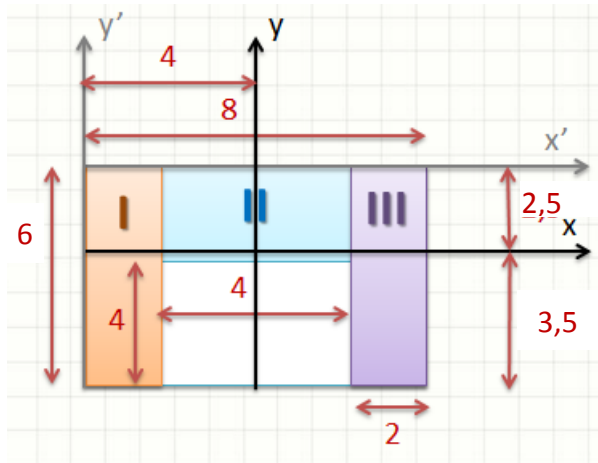
$$S_{xI} = S_{xIII} = (b * h^2) / 2 = (2 * 6^2) / 2 = 6^2 = 36$$

$$S_{xII} = (b * h^2) / 2 = (4 * 2^2) / 2 = 2 * 4 = 8$$

$$S_x = S_{xI} + S_{xII} + S_{xIII} = -36 - 8 - 36 = -80$$

$$A = A_I + A_{II} + A_{III} = 2*6 + 2*4 + 2*6 = 12 + 8 + 12 = 32$$

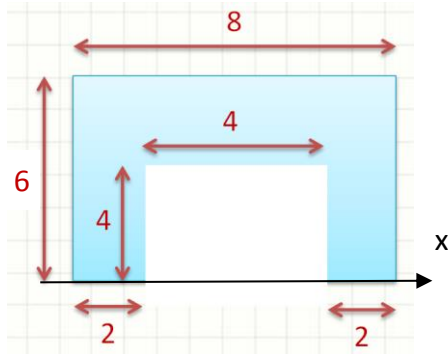
$$Y_g = S_x / A = -80 / 32 = -2.5$$



Exercício - Aula 1 – Solução Alternativa

Cálculo da Posição do Centroide

É possível, alternativamente, calcular o momento estático por meio da diferença dos momentos estáticos entre um retângulo completamente cheio, subtraindo o momento estático da área vazada:



Note que, neste caso, é mais conveniente colocar o eixo X na parte de baixo do área.

$$S_{x_{\text{cheio}}} = (b * h^2) / 2 = (8 * 6^2) / 2 = 4 * 6^2 = 144$$

$$S_{x_{\text{buraco}}} = (b * h^2) / 2 = (4 * 4^2) / 2 = 2 * 16 = 32$$

$$S_x = S_{x_{\text{cheio}}} - S_{x_{\text{vazado}}} = 144 - 32 = 112$$

$$A = A_{\text{cheia}} - A_{\text{buraco}} = 8 * 6 - 4 * 4 = 48 - 16 = 32$$

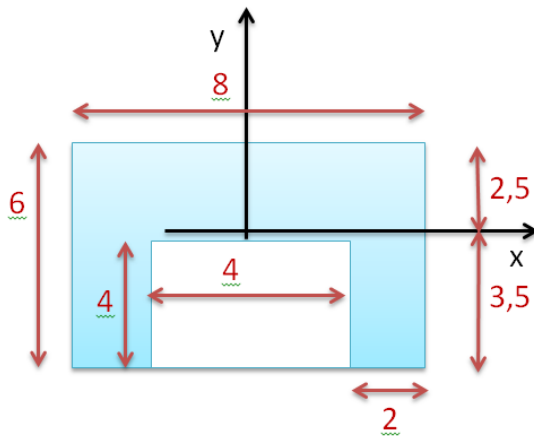
$$Y_g = S_x / A = 112 / 32 = 3,5 \text{ (acima do eixo x apresentado na última figura!)}$$

OBSERVAÇÃO: Onde colocamos o eixo “x” inicialmente? Na verdade, como o que buscamos é o “x” que passa no centro de gravidade, o eixo inicial pode ficar em qualquer local; em geral, procuramos colocar esse eixo em regiões que facilitem os cálculos. Mas... como saber qual é o local que facilita os cálculos? Simples... **resolvendo mais e mais exercícios!**

Exercício - Aula 2 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos percebam a importância de organizar a solução antes de iniciar a resolver um problema de cálculo, que usualmente se inicia pela determinação do centroide ou do momento de inércia. Existem sempre muitos caminhos, alguns são substancialmente mais longos que outros.

O problema é apresentado com a figura abaixo:



Pede-se:

- I_x , I_y e I_{xy} dos eixos representados, que passam pelo centroide
- Determinar se esses são os eixos principais
- Se não forem, determinar e calcular os momentos de inércia dos eixos principais

Bem, por onde começar?

Dado que o problema pede o cálculo dos momentos de inércia e do produto de inércia, a primeira pergunta que precisa ser respondida é: com relação a quais eixos?

O problema sugere a direção dos eixos e já fornece o centroide. Sendo assim, podemos partir para o cálculo dos momentos de inércia. Caso contrário, deveríamos iniciar pela determinação do centroide (veja no exercício da Aula 1).

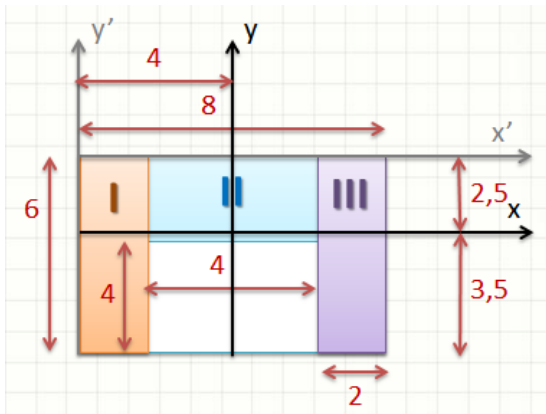
Cálculo dos Momentos de Inércia

Como não sabemos calcular o momento de inércia da figura como um todo (ao menos não sem usar uma integral complicada), podemos recorrer ao mesmo artifício de “picotar a figura”.

Entretanto, os eixos não estão em posições que saibamos, de antemão, a fórmula de cálculo... precisaremos transladar os eixos. Sendo assim, para facilitar, **vamos partir dos eixos centrais de cada um dos pedaços** (podendo, assim, usar a fórmula de translação simplificada $I_{x'} = I_x + d^2 \cdot A$) e transladar cada um destes eixos para o centroide da figura.

A soma dos valores dos momentos de inércia calculados desta forma será o momento de inércia da figura como um todo.

Começemos pela figura I. Observe:



O momento de inércia $I_{x'}$ para a figura I é:

$$I_{x'I} = (b * h^3) / 12 = (2 * 6^3) / 12 = 216 / 6 = 36$$

Transladando para o eixo x , que está a uma distância $(3,5-3) = 0,5$ de x' :

$$I_{xI} = I_{x'I} + d^2 * A = 36 + 0,5^2 * 12 = 39$$

$$I_{xI} = 39 \text{ m}^4$$

Observe que, com relação ao eixo X , não há diferença entre as figuras I e III... logo...

$$I_{xIII} = 39 \text{ m}^4$$

Já o momento de inércia $I_{y'}$ para a figura I é:

$$I_{y'I} = (b * h^3) / 12 = (6 * 2^3) / 12 = 8 / 2 = 4$$

Transladando para o eixo y , que está a uma distância $(4-1) = 3$ de y' :

$$I_{yI} = I_{y'I} + d^2 * A = 4 + 3^2 * 12 = 112$$

$$I_{yI} = 112 \text{ m}^4$$

Observe que, por simetria... $I_{yIII} = I_{yI}$

$$I_{yIII} = 112 \text{ m}^4$$

O produto de inércia também é simples:

$$I_{x'y'I} = 0$$

$$I_{xyI} = I_{x'y'I} + dx * dy * A = 0 + (-3) * (-0,5) * 12 = 18$$

$$I_{xyI} = 18 \text{ m}^4$$

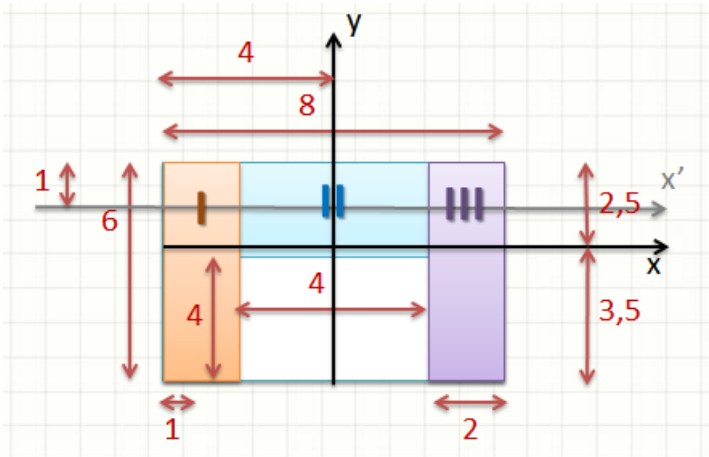
No caso do I_{xyIII} ... colocando o eixo convenientemente em seu centro de gravidade....

$$I_{x'y'III} = 0$$

$$I_{xyIII} = I_{x'y'III} + dx * dy * A = 0 + 3 * (-0,5) * 12 = -18$$

$$I_{xyIII} = -18 \text{ m}^4$$

Faltam agora os momentos de inércia da figura II, que precisam de eixos mais interessantes (o eixo y já é o eixo central da figura II, então ele é o que será usado!):



Com relação ao eixo X, podemos calcular $I_{x'II}$:

$$I_{x'II} = (b * h^3) / 12 = (4 * 2^3) / 12 = 8 / 3 = 2,6666...$$

Transladando para o eixo x , que está a uma distância $(2,5-1) = 1,5$ de x' :

$$I_{xII} = I_{x'II} + d^2 * A = 2,67 + 1,5^2 * 8 = 20,67$$

$$I_{xII} = 20,67 \text{ m}^4$$

O eixo y já é o eixo de simetria... logo

$$I_{yII} = (b * h^3) / 12 = (2 * 4^3) / 12 = 128 / 12 = 10,6666...$$

$$I_{yII} = 10,67 \text{ m}^4$$

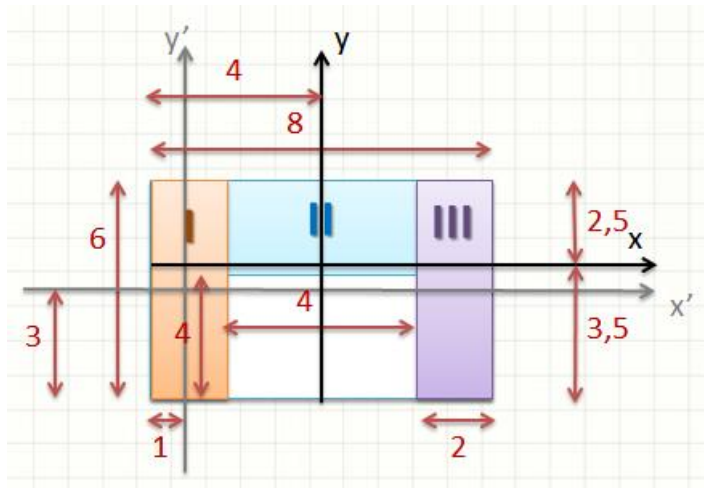
Com relação ao produto de inércia...

$$I_{x'yII} = 0$$

$$I_{xyI} = I_{x'yI} + dx * dy * A = 0 + 0 * 1,5 * 8 = 0$$

$$I_{xyI} = 0 \text{ m}^4$$

Quadro Resumo dos Momentos de Inércia



$$I_{xI} = 39 \text{ m}^4$$

$$I_{yI} = 112 \text{ m}^4$$

$$I_{xyI} = 18 \text{ m}^4$$

$$I_{xII} = 20,67 \text{ m}^4$$

$$I_{yII} = 10,67 \text{ m}^4$$

$$I_{xyII} = -18 \text{ m}^4$$

$$I_{xIII} = 39 \text{ m}^4$$

$$I_{yIII} = 112 \text{ m}^4$$

$$I_{xyIII} = 0 \text{ m}^4$$

Logo..

$$I_x = 39 + 20,67 + 39 = 98,67$$

$$I_x = 98,67 \text{ m}^4$$

$$I_y = 112 + 10,67 + 112 = 234,67$$

$$I_y = 234,67 \text{ m}^4$$

$$I_{xy} = 18 - 18 + 0 = 0$$

$$I_{xy} = 0 \text{ m}^4$$

Como $I_{xy} = 0$, estes são os eixos principais de inércia! I_y é o momento máximo e I_x é o momento mínimo... ainda que a figura não seja simétrica em relação ao eixo X!

Parece muita coisa? Nem tanto: na página a seguir, apenas os cálculos estão apresentados.

Exercício - Aula 2 – Solução (apenas Cálculos)

$$I_{x'I} = (b * h^3) / 12 = (2 * 6^3) / 12 = 216 / 6 = 36$$

$$I_{xI} = I_{x'I} + d^2 * A = 36 + 0,5^2 * 12 = 39$$

$$I_{xI} = 39 \text{ m}^4$$

$$I_{xIII} = 39 \text{ m}^4$$

$$I_{y'I} = (b * h^3) / 12 = (6 * 2^3) / 12 = 8 / 2 = 4$$

$$I_{yI} = I_{y'I} + d^2 * A = 4 + 3^2 * 12 = 112$$

$$I_{yI} = 112 \text{ m}^4$$

$$I_{yIII} = 112 \text{ m}^4$$

$$I_{x'y'I} = 0$$

$$I_{xyI} = I_{x'y'I} + dx * dy * A = 0 + (-3) * (-0,5) * 12 = 18$$

$$I_{xyI} = 18 \text{ m}^4$$

$$I_{x'y'III} = 0$$

$$I_{xyIII} = I_{x'y'III} + dx * dy * A = 0 + 3 * (-0,5) * 12 = -18$$

$$I_{xyIII} = -18 \text{ m}^4$$

$$I_{x''II} = (b * h^3) / 12 = (4 * 2^3) / 12 = 8 / 3 = 2,6666...$$

$$I_{xII} = I_{x''II} + d^2 * A = 2,67 + 1,5^2 * 8 = 20,67$$

$$I_{xII} = 20,67 \text{ m}^4$$

$$I_{yII} = (b * h^3) / 12 = (2 * 4^3) / 12 = 128 / 12 = 10,6666...$$

$$I_{yII} = 10,67 \text{ m}^4$$

$$I_{x'yII} = 0$$

$$I_{xyII} = I_{x'yII} + dx * dy * A = 0 + 0 * 1,5 * 8 = 0$$

$$I_{xyII} = 0 \text{ m}^4$$

$$I_x = 39 + 20,67 + 39 = 98,67$$

$$I_x = 98,67 \text{ m}^4$$

$$I_y = 112 + 10,67 + 112 = 234,67$$

$$I_y = 234,67 \text{ m}^4$$

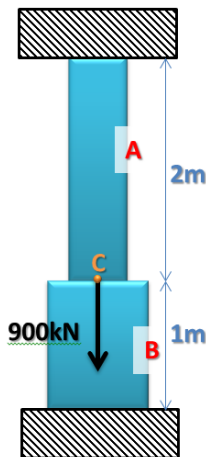
$$I_{xy} = 18 - 18 + 0 = 0$$

$$I_{xy} = 0 \text{ m}^4$$

Exercício - Aula 3 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem a importância da relação entre as tensões e as deformações no cálculo de estruturas estaticamente indeterminadas. Nestas estruturas, as equações de equilíbrio não são suficientes, sendo necessárias as equações de compatibilidade de deslocamentos.

A proposta é fornecer um problema usual da engenharia civil para o cálculo de reações de apoio e deslocamentos. O problema é apresentado com a figura abaixo:



São fornecidos ainda:

$$\phi_A = 0,5\text{m} \quad \phi_B = 0,5\text{m} \quad E_A = E_B = E = 50\text{GPa}$$

Pede-se:

- As reações de apoio
- O diagrama de esforços normais
- O deslocamento em C

Bem, por onde começar?

O problema começa solicitando o cálculo do deslocamento. Esse valor vai depender das cargas em cada trecho da barra (a descobrir), dos comprimentos (dados), dos módulos de elasticidade (dados) e das áreas das seções transversais (a descobrir, baseadas diretamente nos dados).

Antes de nos debruçarmos sobre o cálculo das reações de apoio, é conveniente complementarmos as informações fornecidas com as áreas das seções transversais. Como é fornecido o diâmetro, assume-se que os pilares sejam cilíndricos e, sendo assim:

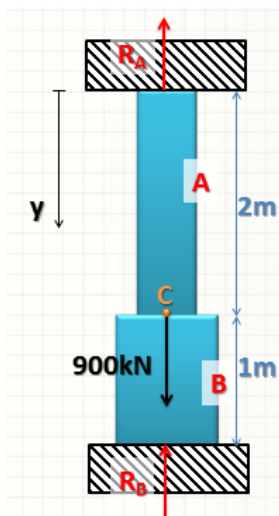
$$A_A = \pi \cdot \phi_A^2 / 4 = \pi \cdot 0,5^2 / 4 = \pi \cdot 0,25 / 4 = \pi / 16 \text{ m}^2$$

$$A_B = \pi \cdot \phi_B^2 / 4 = \pi \cdot 1^2 / 4 = \pi \cdot 1 / 4 = \pi / 4 \text{ m}^2$$

Assim, os dados completos para o cálculo são:

$$\phi_A = 0,5\text{m} \quad \phi_B = 0,5\text{m} \quad E_A = E_B = E = 50\text{GPa} \quad A_A = \pi / 16 \text{ m}^2 \quad A_B = \pi / 4 \text{ m}^2$$

Cálculo do Equilíbrio Estático



Vamos agora verificar o equilíbrio estático da estrutura. Como a estrutura é vertical, vamos colocar um eixo Y conforme indicado na figura a seguir.

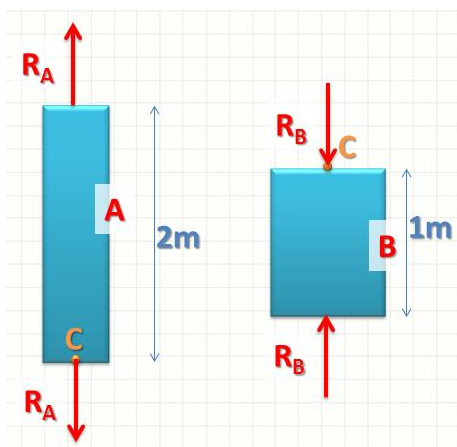
Com esse eixo **y** podemos escrever a equação de equilíbrio estático na vertical. Como o pilar está parado, é razoável afirmar que a resultante das forças que atuam nele, na direção **y**, seja igual a zero. Sendo assim, adotando as reações de apoio como indicadas na figura, calculamos:

$$900.000 - R_A - R_B = 0 \rightarrow$$

$$R_A = 900.000 - R_B$$

Como já sabíamos, essa equação não seria suficiente para a determinação das reações. Sendo assim, prosseguimos para o cálculo do deslocamento do ponto **C** pelo ponto de vista de cada uma das barras: $\delta_{C,A}$ e $\delta_{C,B}$.

Cálculo da Compatibilidade dos Deslocamentos



Para determinar a compatibilidade dos deslocamentos, vamos usar o princípio da superposição de efeitos. Para isso, vamos desenhar as barras de maneira isolada, nos chamados “diagramas de corpo livre”:

$$\delta_{C,A} = P_A \cdot L_A / (E_A \cdot A_A) = R_A \cdot L_A / (E \cdot \pi / 16) \rightarrow$$

$$\delta_{C,A} = R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) \text{ m} \quad (\text{para baixo})$$

$$\delta_{C,B} = P_B \cdot L_B / (E_B \cdot A_B) = R_B \cdot L_B / (E \cdot \pi / 4) \rightarrow$$

$$\delta_{C,B} = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi) \text{ m} \quad (\text{para baixo})$$

Entretanto, como o ponto **C** é o mesmo ponto, ele tem que se deslocar da mesma quantidade em ambas as barras. Sendo assim, podemos usar a seguinte equação de compatibilidade de deslocamentos: $\delta_{C,A} = \delta_{C,B}$... que nos leva a:

$$\delta_{C,A} = R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi) = \delta_{C,B}$$

Ou, simplesmente:

$$R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi)$$

Que pode ser reescrita como:

$$R_A = (R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi)) \cdot ((E \cdot \pi) / 16 \cdot L_A) \rightarrow$$

$$R_A = R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A)$$

Chegamos em uma outra equação relacionando R_A e R_B , agora pela compatibilidade de deslocamentos.

Cálculo das Reações que Compatibiliza os Resultados

Juntando com a equação obtida pelo equilíbrio estático:

$$R_A = 900.000 - R_B$$

Teremos um sistema de equações com duas incógnitas, que só admite uma solução:

$$R_A = R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A)$$

$$R_A = 900.000 - R_B$$

Podemos resolver esse sistema simples assim:

$$R_A = R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A) = 900.000 - R_B = R_A$$

Ou seja...

$$R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A) = 900.000 - R_B$$

Resolvendo esta equação:

$$R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A) + R_B = 900.000 \rightarrow$$

$$\rightarrow L_B \cdot R_B + 4 \cdot L_A \cdot R_B = 900.000 \cdot 4 \cdot L_A \rightarrow$$

$$\rightarrow R_B \cdot (L_B + 4 \cdot L_A) = 900.000 \cdot 4 \cdot L_A \rightarrow$$

$$\rightarrow R_B = 900.000 \cdot 4 \cdot L_A / (L_B + 4 \cdot L_A)$$

Substituindo pelos valores numéricos, chegamos a:

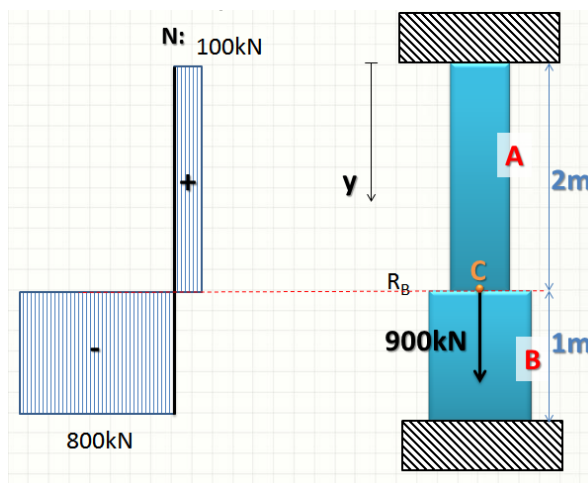
$$R_B = 900.000 \cdot 4 \cdot 2 / (1 + 4 \cdot 2) = 900.000 \cdot 8 / 9 = 800.000 \text{ N}$$

Como, pelo equilíbrio estático, temos que:

$$R_A = 900.000 - R_B = 900.000 - 800.000 \text{ N} = 100.000 \text{ N}$$

$$\text{Logo: } R_A = 100 \text{ kN} \quad R_B = 800 \text{ kN}$$

Diagrama de Esforços Normais



Calculando os Deslocamentos

O deslocamento em C pode ser calculado com qualquer das equações de deslocamentos:

$$\delta_{C,A} = R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) = 100000 \cdot 16 \cdot 2 / (50 \cdot 10^9 \cdot 3,141592) = 20,37 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_{C,A} \approx \mathbf{0,020 \text{ mm}}$$

Podemos verificar o cálculo todo, calculando o deslocamento pela outra equação:

$$\delta_{C,B} = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi) = 800000 \cdot 4 \cdot 1 / (50 \cdot 10^9 \cdot 3,141592) = 20,37 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\delta_{C,B} \approx \mathbf{0,020 \text{ mm}}$$

Exercício - Aula 3 – Solução (apenas Cálculos)

$$A_A = \pi \cdot \phi_A^2 / 4 = \pi \cdot 0,5^2 / 4 = \pi \cdot 0,25 / 4 = \pi / 16 \text{ m}^2 \quad A_A = \pi / 16 \text{ m}^2$$

$$A_B = \pi \cdot \phi_B^2 / 4 = \pi \cdot 1^2 / 4 = \pi \cdot 1 / 4 = \pi / 4 \text{ m}^2 \quad A_B = \pi / 4 \text{ m}^2$$

Cálculo do Equilíbrio Estático

$$900.000 - R_A - R_B = 0 \quad \rightarrow \quad R_A = 900.000 - R_B$$

Cálculo da Compatibilidade dos Deslocamentos

$$\delta_{C,A} = P_A \cdot L_A / (E_A \cdot A_A) = R_A \cdot L_A / (E \cdot \pi / 16) \rightarrow \delta_{C,A} = R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) \text{ m (baixo)}$$

$$\delta_{C,B} = P_B \cdot L_B / (E_B \cdot A_B) = R_B \cdot L_B / (E \cdot \pi / 4) \rightarrow \delta_{C,B} = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi) \text{ m (baixo)}$$

$$\delta_{C,A} = \delta_{C,B} \rightarrow R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi) \rightarrow$$

$$\rightarrow R_A = (R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi)) \cdot ((E \cdot \pi) / 16 \cdot L_A) \rightarrow R_A = R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A)$$

Cálculo das Reações que Compatibiliza os Resultados

$$R_A = R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A)$$

$$R_A = 900.000 - R_B$$

$$R_A = R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A) = 900.000 - R_B = R_A \rightarrow R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A) = 900.000 - R_B \rightarrow$$

$$\rightarrow R_B \cdot (L_B / 4 \cdot L_A) + R_B = 900.000 \rightarrow L_B \cdot R_B + 4 \cdot L_A \cdot R_B = 900.000 \cdot 4 \cdot L_A \rightarrow$$

$$\rightarrow R_B \cdot (L_B + 4 \cdot L_A) = 900.000 \cdot 4 \cdot L_A \rightarrow R_B = 900.000 \cdot 4 \cdot L_A / (L_B + 4 \cdot L_A)$$

$$R_B = 900.000 \cdot 4 \cdot 2 / (1 + 4 \cdot 2) = 900.000 \cdot 8 / 9 = 800.000 \text{ N} \quad R_B = 800.000 \text{ N}$$

$$R_A = 900.000 - R_B = 900.000 - 800.000 \text{ N} = 100.000 \text{ N} \quad R_A = 100.000 \text{ N}$$

Calculando os Deslocamentos

$$\delta_{C,A} = R_A \cdot 16 \cdot L_A / (E \cdot \pi) = 100000 \cdot 16 \cdot 2 / (50 \cdot 10^9 \cdot 3,141592) = 20,37 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad \delta_{C,A} \approx 0,020 \text{ mm}$$

$$\delta_{C,B} = R_B \cdot 4 \cdot L_B / (E \cdot \pi) = 800000 \cdot 4 \cdot 1 / (5 \cdot 10^{10} \cdot 3,141592) = 20,37 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad \delta_{C,B} \approx 0,020 \text{ mm}$$

2. No projeto do monotrilho, a nova linha do metrô de São Paulo, a representação de carga dos pilares adotada foi a de uma carga concentrada no centro de gravidade da área da seção transversal. Considerando que os pilares possuem um diâmetro de 1,5 metros e altura total de 30 metros:

I) Os engenheiros adotaram o modelo de compressão com tensão uniforme $\sigma = F/A$ para o cálculo aproximado do encurtamento do pilar em carga

PORQUE

II) O princípio de Saint Venant se aplica, visto que apenas a região das extremidades estará sujeita a tensões não uniformes.

- a) O método I é adequado e a justificativa II é coerente.
- b) O método I é inadequado, mas a justificativa II é coerente.
- c) O método I é adequado, mas a justificativa II é incoerente.
- d) O método I é inadequado e a justificativa II é incoerente.

Resposta: alternativa A

Exercício - Aula 4 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem a influência da tensão e temperatura nas medidas dos elementos.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

Uma barra de aço mede 120m quando tracionada por 1000N a 20°C. Se a tensão for removida e a temperatura aumentar para 45°C, qual será o comprimento da barra?

$$A = 6,25 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad E = 200 \text{ GPa} \quad \alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Bem, por onde começar?

Vamos pensar: a tração causou um alongamento que será removido. A barra original então mede L, e depois do alongamento da tração mede $L + \delta_A$. Depois de removida a tensão e incremento da temperatura, ela irá medir $L + \delta_B$.

Calculando o Comprimento Original da Barra

Como precisamos de L para calcular δ_B , mas temos apenas $L + \delta_A = 120\text{m}$, precisamos primeiramente calcular o valor de L.

Sabemos que o alongamento pela carga de 100N é:

$$\delta_A = P \cdot L / (E \cdot A)$$

E que:

$$\delta_A = 120 - L$$

O que resulta em:

$$120 - L = P \cdot L / (E \cdot A) \rightarrow 120 - L = 1000 \cdot L / (2 \cdot 10^{11} \cdot 6,25 \cdot 10^{-6}) \rightarrow$$

$$\rightarrow 120 - L = 1000 \cdot L / (1,25 \cdot 10^6) \rightarrow (1,25 \cdot 10^6) \cdot (120 - L) = 1000 \cdot L \rightarrow$$

$$\rightarrow 150 \cdot 10^6 - 1,25 \cdot 10^6 \cdot L = 1000 \cdot L \rightarrow 1000 \cdot L + 1250000 \cdot L = 150 \cdot 10^6 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1251000 \cdot L = 150 \cdot 10^6 \rightarrow 1,251 \cdot 10^6 \cdot L = 150 \cdot 10^6 \rightarrow$$

$$\rightarrow L = 150 / 1,251 = 119,90407673860911270983213429257$$

Vamos tomar até a 4ª casa decimal, ficando com $L = 119,9041$ (encurtamento de aprox. 9,6cm)

Calculando o Comprimento da Barra Após Aquecimento

$$\delta_B = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

Como a barra foi aquecida de 20°C para 45°C, $\Delta T = 25^\circ\text{C}$. Logo...

$$\delta_B = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 17 \cdot 10^{-6} \cdot 25 \cdot 119,9041 = 50959,2425 \cdot 10^{-6} = 50,9592425 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Tomando até a 4ª casa decimal, $\delta_B = 0,0510\text{m}$ (alongamento de aprox. 5,1 cm).

$$L + \delta_B = 119,9041 + 0,0510 = 119,9551 \text{ m}$$

$$L + \delta_B = 119,9551 \text{ m}$$

4.2. No projeto da obra de uma ponte, um pilar foi de 4m foi especificado em aço com $E = 200\text{GPa}$, área da seção transversal de $0,1\text{m}^2$ e com momentos principais 2m^4 e de $0,9\text{m}^4$. Por um problema na execução, o pilar teve de ser aumentado, ficando com 4,4 metros de comprimento. Nesse contexto, analise a afirmação e a justificativa abaixo:

I) Se for considerada uma carga em que o pilar original ficaria em equilíbrio neutro, será necessária uma mudança na forma/área do pilar

PORQUE

II) O novo pilar é mais esbelto do que o projetado originalmente e, sendo assim, a carga causará flambagem no pilar.

- a) A afirmação I é correta e a justificativa é coerente.
- b) A afirmação I é incorreta, mas a justificativa é coerente.
- c) A afirmação I é correta, mas a justificativa é incoerente.
- d) A afirmação I é incorreta e a justificativa é incoerente.

A alternativa “A” está correta porque a afirmação é correta; se o raio de giração for mantido, qualquer aumento no comprimento leva a um aumento de esbeltez... e qualquer ampliação na esbeltez de um pilar em equilíbrio neutro fará com que ele fique em equilíbrio instável, ou seja, propenso à flambagem.

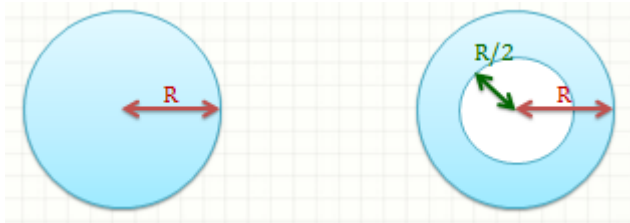
A solução para evitar o problema é ampliar o raio de giração, o que pode ser feito ampliando o momento de inércia (em especial o menor deles) mais do que a área do pilar.

Exercício - Aula 5 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem a importância da seção transversal na transmissão de potência e a relação com o cisalhamento máximo.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

Um eixo de comprimento 10m e $R=10\text{cm}$ está submetido ao $T = 80\text{kN.m}$. Calcule τ_{MAX} e a potência transmitida a 5000RPM na configurações da esquerda, abaixo:



A configuração da direita (vazada) será calculada para efeito comparativo.

Cálculos Básicos

$$A_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^2$$

$$A_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot (R/2)^2 \rightarrow A_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot R^2 / 4 \rightarrow A_{\text{vazado}} = 3 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$J_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^4 / 2$$

$$J_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^4 / 2 - (\pi \cdot (R/2)^4) / 2 \rightarrow J_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^4 / 2 - (\pi \cdot R^4) / 32 \rightarrow J_{\text{vazado}} = 15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32$$

$$\omega = 5000/60 = 250/3 \text{ Hz} = 500 \pi/3 \text{ rad/s}$$

Resumidamente:

$$L = 10\text{m}^2 \quad R=0,1\text{m} \quad T = 80\text{kN.m} \quad \omega = 250/3 \text{ Hz}$$

$$A_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^2 \quad A_{\text{vazado}} = 3 \cdot \pi \cdot R^2 \quad J_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^4 / 2 \quad J_{\text{vazado}} = 15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32$$

Caso 1: Seção Cheia

$$\tau_{\text{max}} = T \cdot R / J_{\text{cheio}} = T \cdot R / (\pi \cdot R^4 / 2)$$

$$\tau_{\text{max}} = 2 \cdot T / (\pi \cdot R^3) = 2 \cdot 80000 / (0,001 \cdot \pi)$$

$$\tau_{\text{max}} = 1,6 \cdot 10^8 / \pi \text{ Pa} = 160 / \pi \text{ MPa}$$

$$P = T \cdot \omega = 80000 \cdot 500\pi/3 = 41,9 \text{ MW}$$

Caso 2: Seção Vazada

$$\tau_{\text{max}} = T \cdot R / J_{\text{vazado}} = T \cdot R / (15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32)$$

$$\tau_{\text{max}} = 32 \cdot T / (15 \cdot \pi \cdot R^3) = 32 \cdot 80000 / (0,015 \cdot \pi)$$

$$\tau_{\text{max}} = 5,12 \cdot 10^8 / (3 \cdot \pi) \text{ Pa} = 512 / (3 \cdot \pi) \text{ MPa}$$

$$P = T \cdot \omega = 80000 \cdot 500\pi/3 = 41,9 \text{ MW}$$

5.2. Durante o projeto de um estádio para a copa do mundo, devido ao curto tempo para a execução, foi tomada uma decisão pelo uso de estruturas metálicas. Nesta estrutura, partes da cobertura foram construídas como marquises em balanço, sustentadas por uma viga que, devido a esta carga e ao engastamento em ambos os extremos, sofre um severo esforço de torção. Ocorre que as vigas, de seção circular, estão acrescentando uma carga excessiva à estrutura e o engenheiro precisa, de alguma maneira, reduzir o peso da mesma.

I) O engenheiro deve modificar o projeto para que a viga de suporte das marquises seja oca, isto é, amplie um pouco o diâmetro da mesma, mas faça com que seção transversal seja vazada

PORQUE

II) A região central da seção transversal da viga é a que sofrerá os maiores esforços de cisalhamento e, removendo essa seção, além de reduzir a carga, elimina a região mais solicitada da mesma.

a) A afirmativa I é correta e a justificativa II é correta.

b) A afirmativa I é correta mas a justificativa II é incorreta.

c) A afirmativa I é incorreta e a justificativa II é correta.

d) A afirmativa I é incorreta mas a justificativa II é incorreta.

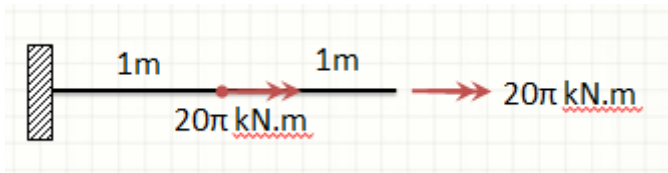
A afirmativa I é correta, mas a justificativa II é claramente incorreta, visto que a região mais solicitada por tensões de cisalhamento em uma viga de seção circular sujeita à torção é a extremidade externa. Além disso, se a região do centro fosse a mais exigida, não faria sentido remover o material daí, visto que a tensão iria apenas migrar para outra região da barra.

Exercício - Aula 6 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem a importância do diagrama de momentos torçores nos cálculos de rotações e cisalhamento máximo, além da percepção da influência da forma da seção nas rotações e tensões de cisalhamento máximas.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

A barra abaixo, que possui $G = 20\text{GPa}$, tem $R = 10\text{ cm}$. Calcule quanto ponta da barra irá girar com relação ao engastamento e o τ_{MAX} .



Calcule qual seria a diferença de rotação e cisalhamento máximo se a barra fosse oca, com o raio interno igual a 5cm?

Cálculos Básicos

$$A_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^2$$

$$A_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot (R/2)^2 \rightarrow A_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot R^2 / 4 \rightarrow A_{\text{vazado}} = 3 \cdot \pi \cdot R^2$$

$$J_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^4 / 2$$

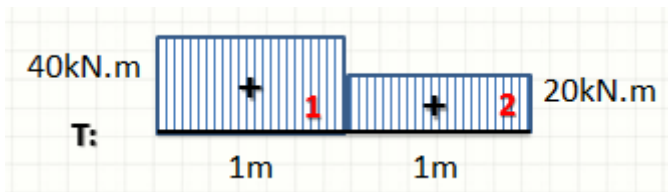
$$J_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^4 / 2 - (\pi \cdot (R/2)^4) / 2 \rightarrow J_{\text{vazado}} = \pi \cdot R^4 / 2 - (\pi \cdot R^4) / 32 \rightarrow J_{\text{vazado}} = 15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32$$

Resumidamente:

$$L = 2\text{ m}^2 \quad R = 0,1\text{ m} \quad G = 20\text{ GPa}$$

$$A_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^2 \quad A_{\text{vazado}} = 3 \cdot \pi \cdot R^2 \quad J_{\text{cheio}} = \pi \cdot R^4 / 2 \quad J_{\text{vazado}} = 15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32$$

Diagrama de Momento Torçor



Caso 1: Seção Cheia

$$\phi_{\text{total}} = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_1 = T_1 \cdot L_1 / G \cdot J = T_1 \cdot L_1 / (G \cdot \pi \cdot R^4 / 2) = 2 \cdot T_1 \cdot L_1 / (G \cdot \pi \cdot R^4)$$

$$\phi_1 = 2.4 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1 / (2 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-4}) = 2.4 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1 / (2 \cdot 10^6 \cdot \pi) = 4 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\phi_2 = 2.2 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1 / (2 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-4}) = 2.2 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1 / (2 \cdot 10^6 \cdot \pi) = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\phi_{\text{total}} = 4 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\tau_{\text{max}} = T_{\text{max}} \cdot R / J_{\text{cheio}} = T_{\text{max}} \cdot R / (\pi \cdot R^4 / 2) = 2 \cdot T_{\text{max}} / (\pi \cdot R^3)$$

$$\tau_{\text{max}} = 2 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot \pi / (\pi \cdot 1 \cdot 10^{-3}) = 8 \cdot 10^7 = 80 \text{ MPa}$$

Caso 2: Seção Vazada

$$\phi_{\text{total}} = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi_1 = T_1 \cdot L_1 / G \cdot J = T_1 \cdot L_1 / (G \cdot 15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32) = 32 \cdot T_1 \cdot L_1 / (G \cdot 15 \cdot \pi \cdot R^4)$$

$$\phi_1 = 32 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1 / (2 \cdot 10^{10} \cdot 15 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-4}) = 128 \cdot 10^4 / (30 \cdot 10^6) = 64 \cdot 10^{-2} / 15 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = 32 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot 1 / (2 \cdot 10^{10} \cdot 15 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-4}) = 64 \cdot 10^4 / (30 \cdot 10^6) = 32 \cdot 10^{-2} / 15 \text{ rad}$$

$$\phi_{\text{total}} = 64 \cdot 10^{-2} / 15 + 32 \cdot 10^{-2} / 15 = 96 \cdot 10^{-2} / 15 \text{ rad} \approx 6,4 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\tau_{\text{max}} = T_{\text{max}} \cdot R / J_{\text{vazado}} = T_{\text{max}} \cdot R / (15 \cdot \pi \cdot R^4 / 32)$$

$$\tau_{\text{max}} = 32 \cdot T_{\text{max}} / (15 \cdot \pi \cdot R^3)$$

$$\tau_{\text{max}} = 32 \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot \pi / (15 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-3})$$

$$\tau_{\text{max}} = 128 \cdot 10^7 / 15 \text{ Pa} = 1280 / 15 \text{ Mpa} \approx 85,33 \text{ Mpa}$$

6.3. Um trecho da estrutura de um shopping center tem sobre ela aplicada uma grande quantidade de esforços de torção devido à ação de outros elementos estruturais. Existem duas preocupações básicas nesse cenário: a primeira é verificar se a tensão de cisalhamento máxima é adequada ao material e, finalmente, se as deformações não são excessivas. Nesse contexto, analise as afirmativas abaixo e selecione a **correta**:

- a) Uma boa aproximação da deformação por torção pode ser obtida considerando o maior esforço torçor aplicado a um dos extremos da barra.
- b) Não há relação alguma entre o cisalhamento e a deformação da barra.
- c) Para calcular o cisalhamento máximo, traça-se o diagrama de momentos torçores e, como torque para o cálculo do cisalhamento, é adotada a diferença entre o maior e o menor momento torçor.
- d) A deformação pode ser calculada por trechos, segundo as regiões torção constante indicadas no diagrama de momentos torçores.
- e) A deformação será constante em toda a barra.

Resposta: D

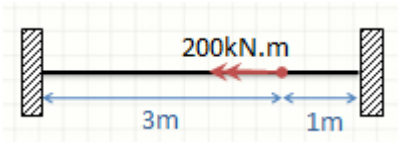
- a) A deformação deve ser calculada por partes (como indicado em D)
- b) Há relação; ambas as grandezas são relacionadas ao torque.
- c) O cisalhamento máximo é calculado com base no maior momento torçor, apenas.
- e) A deformação varia de acordo com os momentos torçores aplicados.

Exercício - Aula 7 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem como o cálculo de rotações pode auxiliar no cálculo de estruturas estaticamente indeterminadas.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

A barra abaixo, que possui $G = 20\text{GPa}$ no trecho de 3m e $G = 60\text{GPa}$ no trecho de 1m , tem $R = 10\text{ cm}$. Calcule as reações de apoio.



Cálculos Básicos

$$A = \pi \cdot R^2 \quad J = \pi \cdot R^4 / 2$$

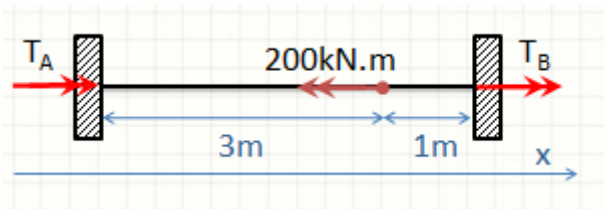
Resumidamente:

$$R = 0,1\text{m} \quad L_1 = 3\text{ m}^2 \quad G_1 = 20\text{GPa} \quad L_2 = 1\text{ m}^2 \quad G_2 = 60\text{GPa}$$

$$A = \pi \cdot R^2 \quad J = \pi \cdot R^4 / 2$$

Equilíbrio Estático

Pelo equilíbrio estático, podemos identificar que haverá as reações T_A e T_B , conforme indicado na figura:



Logo, pelo equilíbrio de momento torçor ao redor do eixo x , temos: $T_A + T_B = 200000$

$$T_A = 200000 - T_B$$

Compatibilidade de Deslocamentos

O deslocamento do primeiro trecho (o de 3m), ϕ_1 , deve ser numericamente igual ao deslocamento do segundo trecho (de 1m), ϕ_2 .

$$\phi_1 = T_A \cdot L_1 / G_1 \cdot J$$

$$\phi_2 = T_B \cdot L_2 / G_2 \cdot J$$

Logo...

$$\phi_1 = T_A \cdot L_1 / G_1 \cdot J = T_B \cdot L_2 / G_2 \cdot J = \phi_2$$

$$T_A = T_B \cdot L_2 \cdot G_1 / L_1 \cdot G_2$$

Resolvendo o Sistema de Equações

$$T_A = 200000 - T_B$$

$$T_A = T_B \cdot L_2 \cdot G_1 / L_1 \cdot G_2$$

$$200000 - T_B = T_B \cdot L_2 \cdot G_1 / L_1 \cdot G_2$$

$$T_B \cdot L_2 \cdot G_1 + T_B \cdot L_1 \cdot G_2 = 200000 \cdot L_1 \cdot G_2$$

$$T_B \cdot (L_2 \cdot G_1 + L_1 \cdot G_2) = 200000 \cdot L_1 \cdot G_2$$

$$T_B = 200000 \cdot L_1 \cdot G_2 / (L_2 \cdot G_1 + L_1 \cdot G_2)$$

$$T_B = 200000 \cdot 3.60 / (1.20 + 3.60)$$

$$T_B = 200000 \cdot 180 / 200 = 180000 \text{ N.m}$$

$$T_B = 180\text{kN.m}$$

Logo...

$$T_A = 200000 - 180000$$

$$T_A = 20\text{kN}$$

7.2. Em porto, um guindaste usado para levar os contêineres do píer para o porão do navio foi preso a uma viga metálica, fixa em seus dois extremos por pilares bastante rígidos. Durante o transporte das cargas, um importante efeito de torção surge na viga. Com relação a essas solicitações, assinale a alternativa CORRETA:

- a) A melhor geometria para a viga é a adoção de uma seção transversal triangular, que ocasiona uma melhor distribuição do cisalhamento.
- b) Se uma pequena parcela do miolo da viga de aço for removida, haverá apenas uma pequena redução na capacidade resistente da mesma.
- c) A maior parte da carga de torção migrará para o apoio mais distante do guindaste, para garantir uma melhor dissipação da carga.
- d) Um guindaste preso a uma viga jamais gerará uma solicitação de torção: as solicitações serão sempre de compressão simples.
- e) Ampliar a resistência dos apoios que sustentam a viga irá reduzir os efeitos da torção na mesma, visto que somente os pilares receberão a carga do guindaste.

Resposta: B

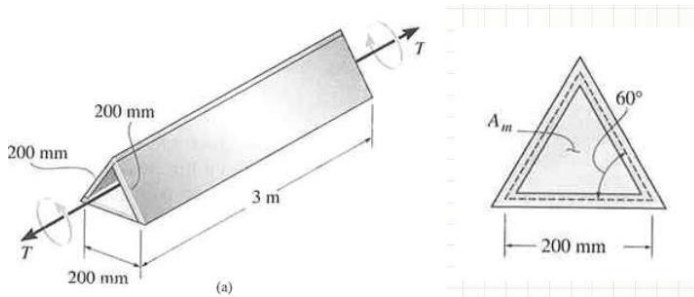
- A) Está incorreta por a melhor forma para a seção transversal com relação à distribuição do cisalhamento é a forma circular.
- C) Está incorreta porque a maior parte da torção migrará para o apoio mais próximo do guindaste.
- D) Está incorreta porque não apenas os guindastes deste tipo normalmente geram esforços de torção nas vigas nas quais estão presos como jamais gerariam apenas esforços de compressão simples.
- E) Está incorreta porque ampliar a resistência dos pilares de apoio apenas ampliaria o efeito da torção na viga em que o guindaste está preso.

Exercício - Aula 8 - Solução

O objetivo deste exercício é que os alunos verifiquem como o cálculo de cisalhamento máximo e rotações pode ser feito em tubos de paredes finas de seções arbitrárias.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

Um tubo triangular, conforme a figura abaixo, de chapas de aço de 5mm de espessura, com $G=75\text{GPa}$. Calcule a tensão de cisalhamento máxima e o ângulo de torção.



Cálculos Básicos

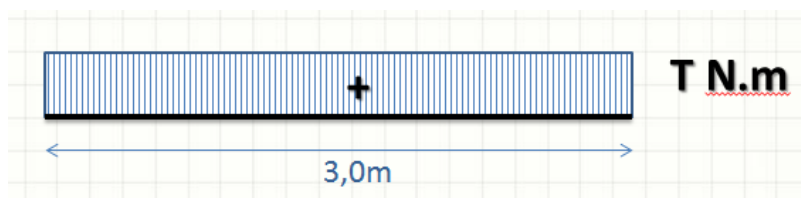
$$A_m = b \cdot h / 2 \quad h = b \cdot \sin 60^\circ$$

Resumidamente:

$$t=0,005\text{m} \quad L=3\text{m} \quad G=75\text{GPa} \quad T=T \quad P=3 \cdot b \quad b=0,2\text{m}$$

Diagramas

Como se trata de um momento constante de valor T, positivo, o diagrama é bastante simples:



Cálculo do Cisalhamento Máximo

O cisalhamento médio é dado pela expressão:

$$\tau_{\text{méd}} = T / (2 \cdot t \cdot A_m)$$

O cisalhamento máximo ocorre na região onde o momento torçor é maior e/ou a espessura é menor; uma vez que o momento torçor e a espessura são constantes, podemos calcular:

$$\tau_{\text{máx}} = T / (2 \cdot t \cdot (b^2 \cdot \sin 60^\circ) / 2)$$

$$\tau_{\text{máx}} = T / (t \cdot b^2 \cdot \sin 60^\circ)$$

$$\tau_{\text{máx}} = T / (5 \cdot 10^{-3} \cdot (2 \cdot 10^{-1})^2 \cdot \sin 60^\circ) = T / (20 \cdot 10^{-5} \cdot \sin 60^\circ) = T / (20 \cdot 10^{-5} \cdot 3^{0,5} / 2) = T / (10 \cdot 10^{-5} \cdot 3^{0,5})$$

$$\tau_{\text{máx}} = T \cdot 10^4 / 3^{0,5} \text{ Pa}$$

Cálculo da Rotação

A rotação é dada pela seguinte expressão:

$$\phi = (T.L / (4.A_m^2.G)) \cdot \int ds/t$$

A rotação deve ser calculada trecho a trecho, considerando que o momento torçor e a espessura deve ser constante em cada um deles. Como ambos são constantes ao longo da viga, basta calcular. Vamos começar pela integral:

$$I = \int ds/t$$

Como t é constante, podemos transportá-lo para fora da integral:

$$I = (1/t) \int ds$$

A integral de cada trecho de comprimento ds ao longo do perímetro médio é, exatamente, o perímetro médio total P, que é igual a 3.b. Logo, a integral total é:

$$I = 3.b/t$$

Voltando para a equação principal:

$$\phi = (T.L / (4.A_m^2.G)) \cdot \int ds/t = (T.L / (4.G \cdot ((b^2 \cdot \sin 60^\circ)/2)^2)) \cdot 3.b/t$$

$$\phi = 3.b.T.L / (t.4.G \cdot ((b^2 \cdot \sin 60^\circ)/2)^2) = 3.b.T.L / (t.4.G.b^4 \cdot \sin^2 60^\circ / 4)$$

$$\phi = 3.b.T.L / (t.G.b^4 \cdot \sin^2 60^\circ) = 3.T.L / (t.G.b^3 \cdot \sin^2 60^\circ)$$

$$\phi = 3.T.L / (t.G.b^3 \cdot (3^{0.5} / 2)^2) = 3.T.L / (t.G.b^3 \cdot 3 / 4)$$

$$\phi = T.L / (t.G.b^3 / 4) = 4.T.L / (t.G.b^3)$$

$$\phi = 4.T.3 / (5.10^{-3} \cdot 75.10^9 \cdot (2.10^{-1})^3) = 4.T.3 / (5.10^{-3} \cdot 3.25.10^9 \cdot 4.2.10^{-3})$$

$$\phi = T / (10.10^{-3} \cdot 25.10^9 \cdot 10^{-3}) = T / (25.10^4) = T / ((10^2/4).10^4)$$

$$\phi = 4.T/10^6 \text{ rad}$$

8.2. A concentração de tensões é um fenômeno complexo em que alguns trechos do material ficam sujeitos a maiores esforços quando há uma variação na região resistente da seção transversal. Sobre este fenômeno, analise as afirmativas abaixo:

I) Não existe relação entre as características geométricas da variação da seção transversal e o valor numérico da concentração de tensão.

II) O cálculo da concentração de tensão é muito simples, mas os ábacos são mais práticos e, por isso, as equações não são tão relevantes.

III) Em geral, se a variação da seção transversal – como um furo, por exemplo – não ocorrer na região mais solicitada, não há grande problema e a mesma pode ser ignorada.

As afirmativas corretas são:

- a) I b) II c) III d) I, II e III e) Nenhuma

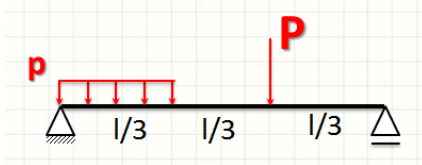
RESPOSTA: E; A Afirmativa I está incorreta porque existe essa relação, e ela é apresentada nos ábacos. II é incorreta porque o cálculo não é simples. III é incorreta porque sempre que houver variação na seção transversal será necessário checar a concentração de tensões.

Exercício - Aula 9 - Solução

O objetivo deste exercício é formar no aluno a noção intuitiva da aparência que os diagramas de cortante e momento fletor devem ter, a fim de que verificações possam ser realizadas quando do traçado a partir do cálculo. Os equívocos nos cálculos são relativamente comuns e o engenheiro precisa sempre fazer uma verificação do resultado com relação à sua intuição.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

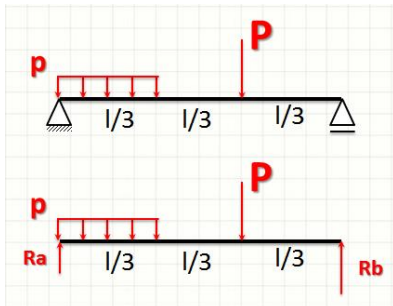
Trace, intuitivamente os diagramas de força cortante e momento fletor na barra abaixo. Para estimar a magnitude, considere que: $P = 100\text{N}$, $p = 10\text{N/m}$ e $l = 3\text{m}$:



Reações de Apoio e Diagrama de Corpo Livre

Sem cálculos, se P é muito maior que a soma total de p , podemos dizer que a reação no apoio da direita, que chamaremos de R_b , será maior que a reação R_a (do lado esquerdo), visto que a carga é distribuída em maior proporção para o apoio mais próximo. Adicionalmente por se tratar de uma viga biapoiada isostática, os momentos relativos nas extremidades são 0.

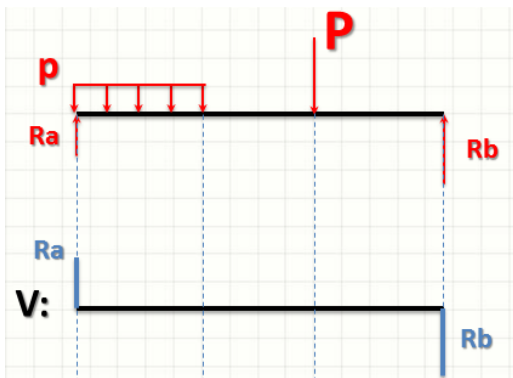
Assim, vamos representar o diagrama de corpo livre como se segue:



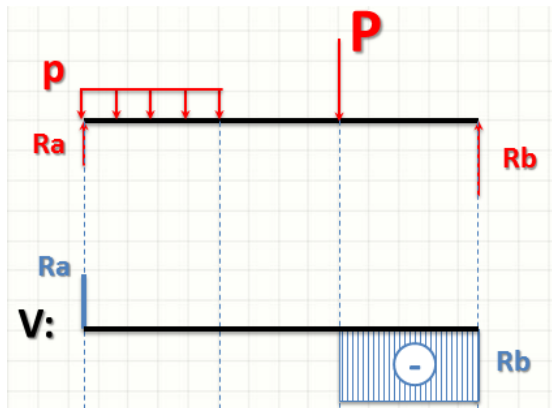
E daremos início ao traçado dos diagramas.

Diagrama de Cortante

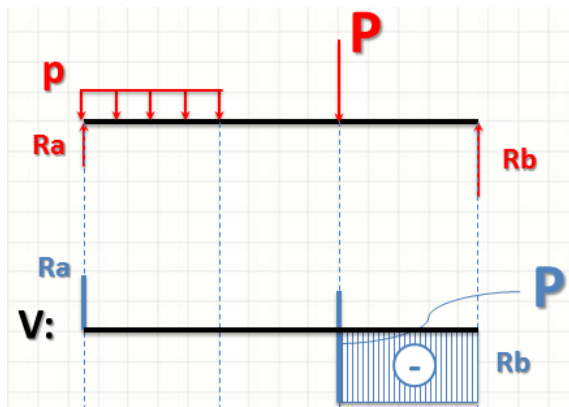
Uma vez que conhecemos as reações cortantes nos extremos da barra, podemos iniciar por elas. R_b gira a barra no sentido anti-horário (cortante negativa) e R_a no sentido horário (cortante positiva):



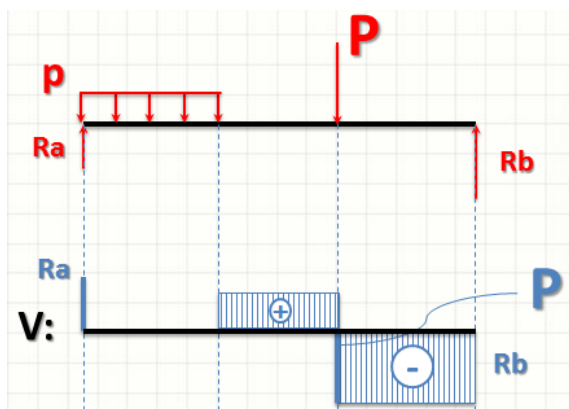
Agora, vamos percorrer a barra da direita para a esquerda, anotando os efeitos de cada força. A primeira força cortante a ser analisada é R_b . Entre R_b e P não há outras forças cortantes, então supõe-se que a força cortante permaneça constante:



Ao chegar no ponto de aplicação de P , a cortante irá mudar. R_b tendia a girar a barra no sentido anti-horário (daí o sinal negativo). P , por outro lado, tende a girar a barra no sentido horário, sendo uma cortante positiva. A resultante será $P - R_b$. Ocorre que pela configuração do problema e magnitudes sugeridas para as forças, com grande probabilidade P será maior que R_b , fazendo com que a resultante seja positiva:

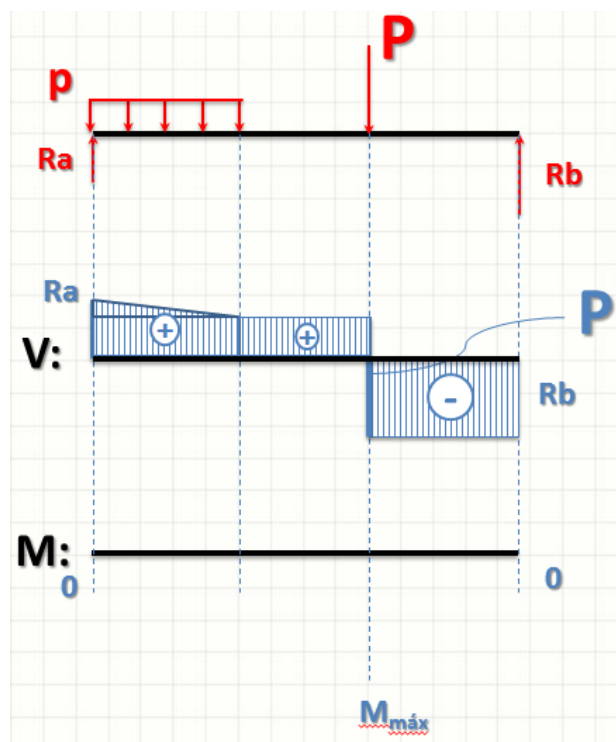


Como não ocorre nada entre P e p , a cortante deve permanecer constante neste trecho:

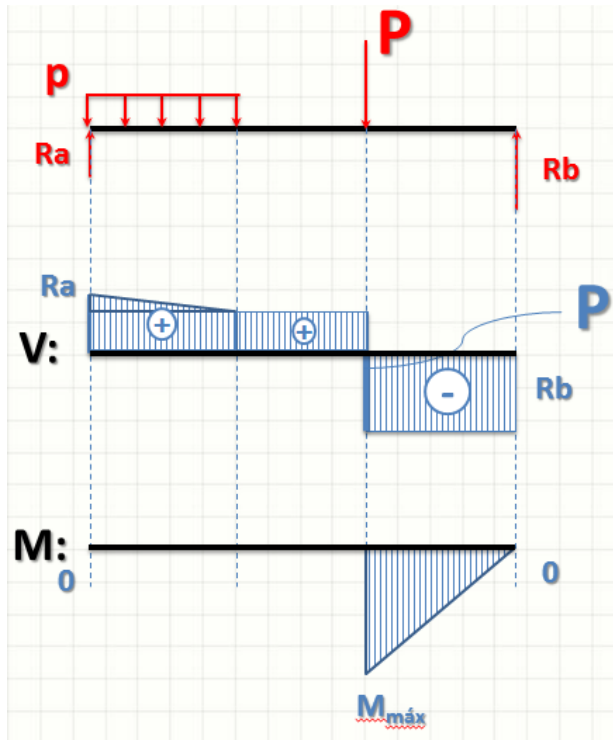


Finalmente, entre o início de p e R_a , a cortante varia de maneira constante ao longo de p , ou seja, o diagrama de cortante terá uma variação linear. Como a carga p está no sentido de girar a barra no sentido positivo (e a cortante acumulada até o ponto já é positiva), o valor da

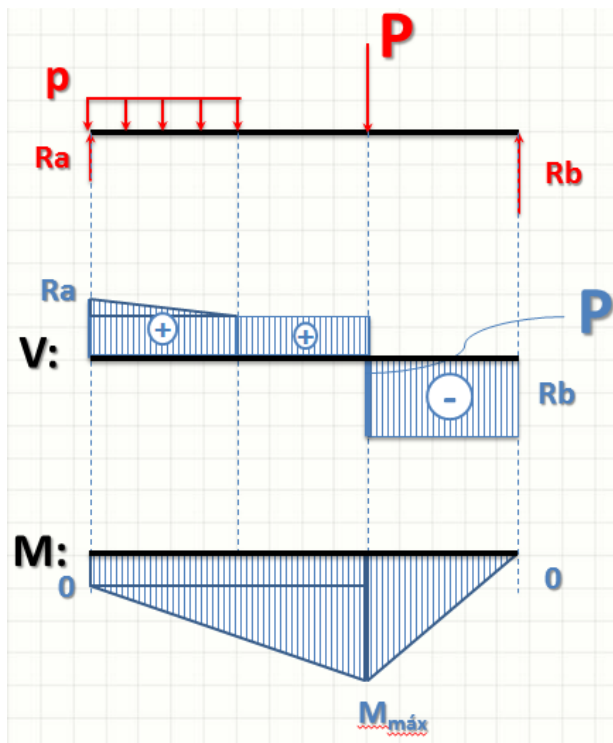
Como é possível verificar de início que os esforços todos curvam a barra de maneira que a parte de baixo fique tracionada, o ponto de máximo em questão estará na parte de baixo da barra, conforme indicado nos diagramas abaixo:



Vamos agora analisar o que acontece em cada trecho. Vamos, por exemplo, começar da direita para a esquerda. Entre R_b e P , a cortante é constante, envergando a barra para baixo. Assim, o momento deve crescer linearmente de 0 até $M_{\text{máx}}$, conforme apontado na figura abaixo.

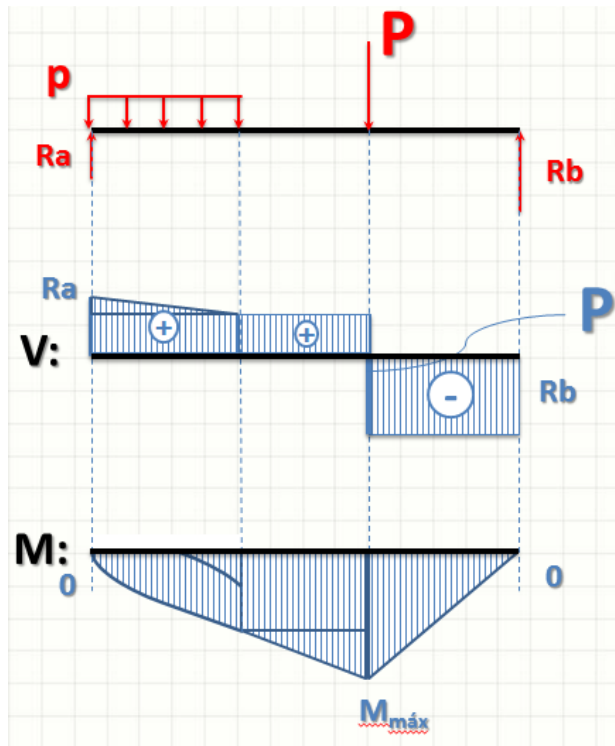


Entre P e p , a cortante inverte de sinal, o que significa que o comportamento do diagrama muda (se era crescente, vira decrescente). Se não houvesse p , P iria reduzir linearmente até o final da barra, do lado esquerdo:



Note que sobra um momento no final desta forma. Este momento não existe na realidade. Quem é o responsável pela anulação do mesmo é exatamente a carga distribuída p : ela atua no sentido de acelerar o decaimento do momento.

No entanto, no diagrama de cortante é possível verificar que a variação da cortante ocorre de maneira linear, o que significa que a variação do momento será quadrática (uma parábola). Como a cortante é crescente da direita para a esquerda, o decaimento se acelera da direita para a esquerda, permitindo o traçado final:



Observe que o formato dos diagramas pode variar ligeiramente (em especial os valores máximos de cada seção, pois dependem dos valores de P , p e l). Entretanto, o aspecto geral será esse independentemente dos valores exatos destas cargas. Isso é importante porque essa noção intuitiva serve para verificarmos os resultados de diagramas calculados através de fórmulas, onde é especialmente fácil de cometer equívocos, em especial com relação a sinais.

O engenheiro sempre lança mão de sua intuição para avaliar os resultados dos cálculos, seja aqueles que ele mesmo realizou mas também aqueles produzidos por computador. Nunca se deve receber resultados numéricos sem questionar se eles fazem sentido. Erros de pequena monta podem passar por essa análise (tornando necessária uma verificação mais detalhada dos cálculos, sempre que possível), mas erros grosseiros (como erros de sinal e erros de digitação no software de cálculo) podem ser facilmente detectados apenas observando os diagramas gerados e comparando-os àqueles que se esperava encontrar.

9.2. Uma viga isostática de uma construção tem 10m de comprimento e uma carga distribuída, devido ao peso próprio, que gera um momento de 30kN.m na sua região central. Essa viga será usada como apoio para uma carga levantada por um guindaste, que fara um esforço de baixo para cima bem na região central da viga. Considerando o contexto, analise as afirmativas a seguir com relação ao momento fletor na barra:

I) A carga do guindaste irá agravar a carga do peso próprio, causando um colapso prematuro da viga.

II) Quando a carga do guindaste gerar um esforço de exatamente 12kN, o momento fletor no ponto central será nulo.

III) O ponto crítico da estrutura, com relação ao momento, varia com a carga do guindaste.

Estão corretas:

- a) I b) I e II c) I e III **d) II e III** e) I, II, III e IV

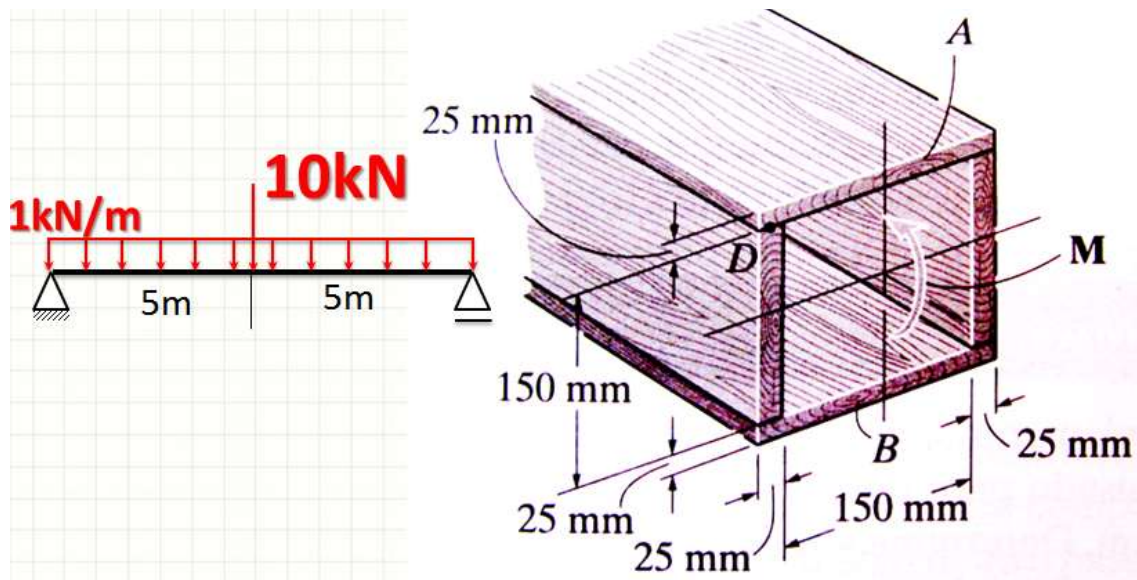
A resposta correta é a **D**. A I é incorreta porque a carga do guindaste é de cima para baixo, aliviando o esforço de momento fletor na viga. II é correta porque, neste caso, o momento gerado pela carga do guindaste será de, exatamente, 30kN.m... no sentido contrário ao da força peso. III também é verdadeira porque de acordo com a carga aplicada pelo guindaste o ponto crítico irá mudar de lugar pois a relação entre os esforços (peso e guindaste) não é linear.

Exercício - Aula 10 - Solução

O objetivo deste exercício é permitir ao aluno verificar que o cálculo de tensão no momento fletor pode ser executado com qualquer tipo de seção transversal, usando o mesmo tipo de equação.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

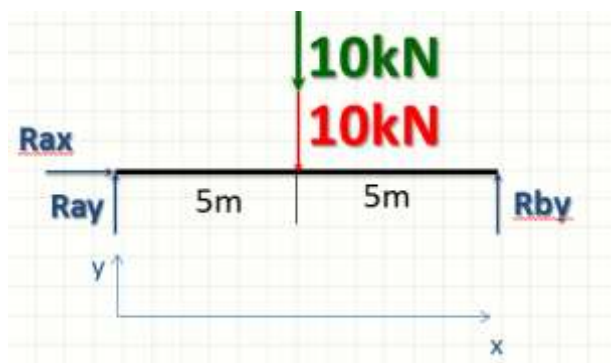
Calcule a σ_{\max} na viga abaixo:



Reações de Apoio e Diagrama de Corpo Livre

Para o traçado dos diagramas, é necessário o cálculo das reações de apoio **Rax**, **Ray**, e **Rby**.

Para o cálculo das reações de apoio, podemos considerar que a carga distribuída está concentrada em seu centro de gravidade, ou seja, no centro da viga, conforme indicado abaixo:



Considerando que as somatórias em X, em Y e o momento com relação a um ponto qualquer (escolhido o A) devem ser todos zero, temos:

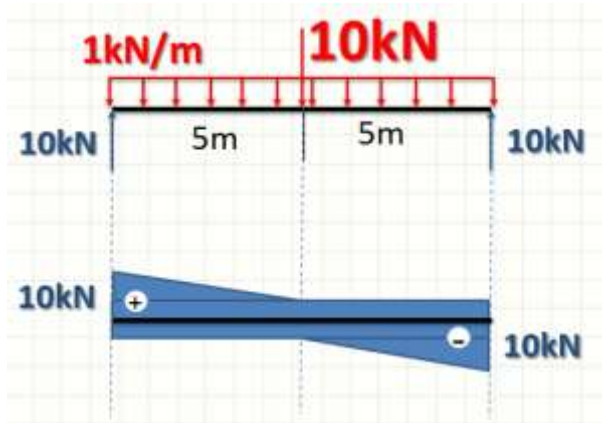
Soma em X: $R_{ax} = 0$

Soma em Y: $R_{ay} + R_{by} - 20000 = 0 \Rightarrow R_{by} = 20000 - R_{ay}$

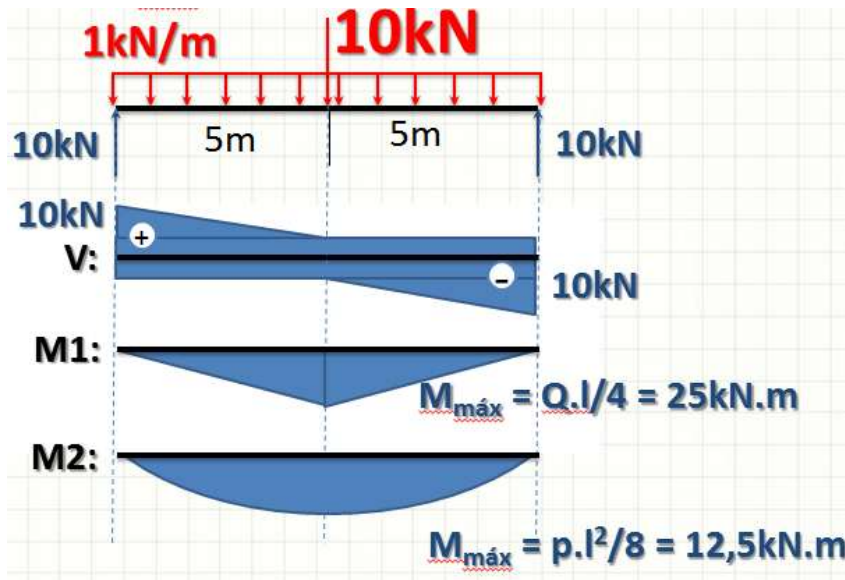
Momento em A: $-10 \cdot R_{by} + 5 \cdot 20 = 0 \Rightarrow R_{by} = 10000N \Rightarrow R_{ay} = 10000N$

Diagramas

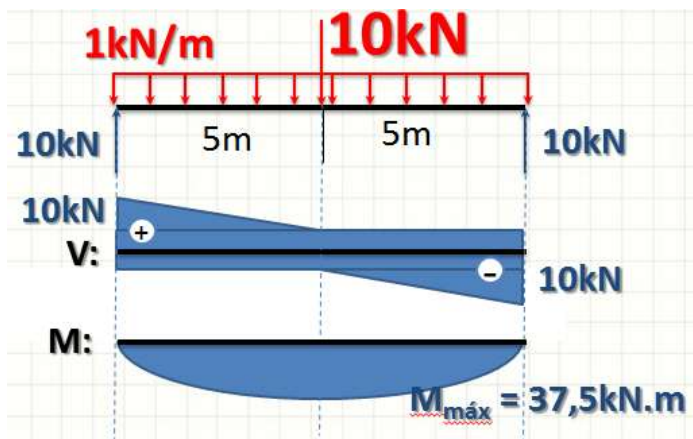
O diagrama de cortante será simples:



O diagrama de momento é uma composição linear dos diagramas da carga concentrada com o da carga distribuída:



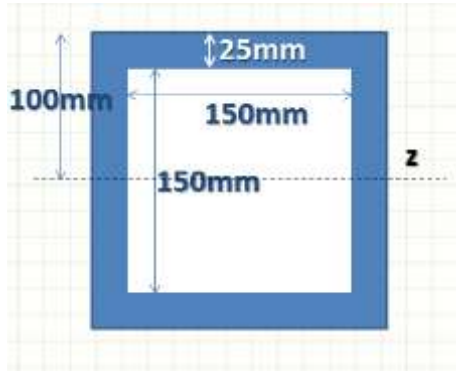
Ou seja...



O momento máximo ocorre, portanto, no centro da viga, na posição $l/2$. Podemos assim calcular a tensão por $M.y/I_z$, lembrado que I_z deve ser calculado.

Cálculo do Y_g e Momento de Inércia

Como a seção transversal é simétrica, o centro de gravidade fica bem ao seu centro, por onde passam os eixos principais de inércia. O momento de inércia pode ser calculado pelo momento do retângulo maior (externo), subtraindo o momento do retângulo vazado (interno), menor:



$$I_z = I_{ze} - I_{zi} = \frac{b_e \cdot h_e^3}{12} - \frac{b_i \cdot h_i^3}{12} = \frac{(b_e \cdot h_e^3 - b_i \cdot h_i^3)}{12}$$

$$I_z = \frac{(0,2 \cdot (0,2)^3 - 0,15 \cdot (0,15)^3)}{12} = \frac{(0,016 - 0,0050625)}{12} = \frac{0,0109375}{12}$$

$$I_z = 9,11 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Cálculo da Tensão Máxima

A tensão máxima de tração ocorrerá na borda inferior da viga, onde $y = 0,1\text{m}$. Assim:

$$\sigma_{\text{máx}} = M \cdot y / I_z = 37500 \cdot 0,1 / (9,11 \cdot 10^{-5}) = 3750 \cdot 10^5 / 9,11$$

$$\sigma_{\text{máx}} = 411 \cdot 10^5 \approx 41\text{MPa}$$

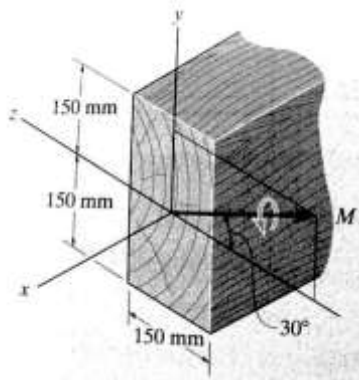
$$\sigma_{\text{máx}} = 41\text{MPa}$$

Exercício - Aula 11 - Solução

O objetivo deste exercício é permitir ao aluno compreender o procedimento de cálculo de pilares com momentos fletores oblíquos.

O problema é apresentado com o seguinte enunciado:

Considerando $M=3,5\text{kN.m}$, calcule o $\sigma_{\text{máx}}$ e a direção do eixo neutro.

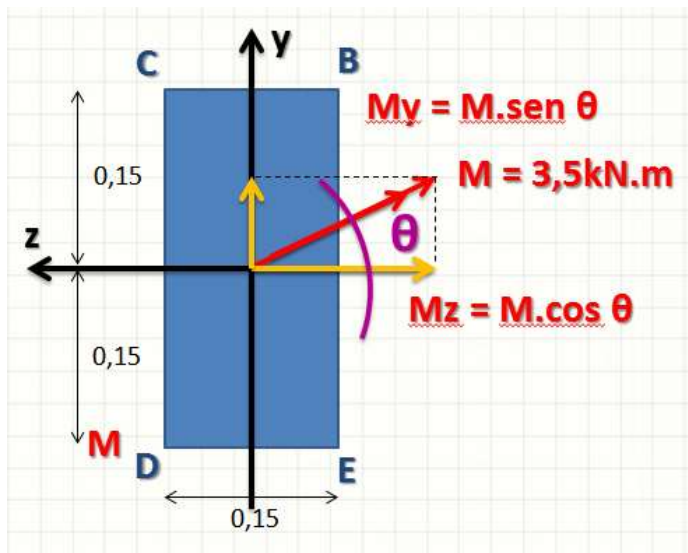


Posição do Centro de Gravidade e Eixos Principais

Uma vez que a figura da seção transversal é simétrica em ambas as direções, os eixos principais coincidem com os eixos de simetria.

Projeção do Momento Oblíquo nos Eixos Principais

A projeção deve ser feita de acordo com o ângulo informado:



Logo:

$$M_y = 3500 * \text{sen } 30^\circ = 1,75\text{kN.m}$$

$$M_z = - 3500 * \text{cos } 30^\circ = - 3,03\text{kN.m} \quad (\text{Negativo porque está contra o eixo } y!)$$

Cálculo dos Momentos de Inércia

Como a figura é retangular e os eixos principais passam pelos eixos de simetria da figura, o cálculo dos momentos de inércia é simples. Considerando $a = 0,15$ (e que o pilar é de $2.a \times 1.a$), temos:

$$I_z = a \cdot (2.a)^3 / 12 = 8.a^4 / 12 = 2.a^4 / 3 \text{ m}^4$$

$$I_y = 2.a \cdot (a)^3 / 12 = 2.a^4 / 12 = a^4 / 6 \text{ m}^4$$

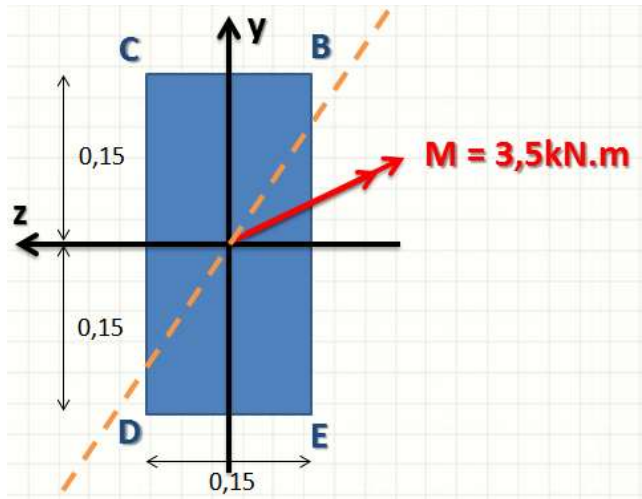
Cálculo do Alfa

Como já temos o ângulo θ a partir do eixo z , podemos usar a fórmula:

$$\alpha = \text{atan}((I_z/I_y) \cdot \tan \theta) = \text{atan}((2.a^4 / 3) \cdot (6 / a^4) \cdot \tan 30^\circ)$$

$$\alpha = \text{atan}(4 \cdot \tan 30^\circ)$$

$$\alpha = 66,6^\circ$$



As tensões máximas ocorrem nos pontos C e E, já que são os mais distantes da linha neutra.

Cálculo das Tensões Máximas

A tensão máxima de tração ocorrerá na borda inferior da viga, onde $y = 0,1\text{m}$. Assim:

$$\sigma_{\text{máx}} = - (M_z \cdot y / I_z) + (M_y \cdot z / I_y)$$

Em C, $z = a/2$; $y = a$:

$$\sigma_C = - (M_z \cdot y / I_z) + (M_y \cdot z / I_y) = - (-3030 \cdot a \cdot (3 / (2.a^4))) + (1750 \cdot (a/2) \cdot (6 / a^4))$$

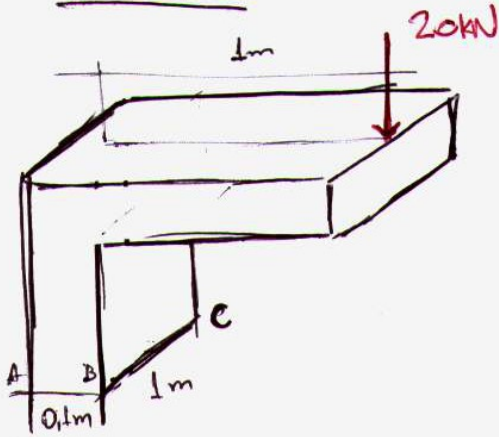
$$\sigma_C = (4545/a^3) + (5250 / a^3) = 9795/a^3 = 2,9\text{MPa}$$

Em E, $z = -a/2$; $y = -a$:

$$\sigma_E = - (M_z \cdot y / I_z) + (M_y \cdot z / I_y) = - (-3030 \cdot -a \cdot (3 / (2.a^4))) + (1750 \cdot (-a/2) \cdot (6 / a^4))$$

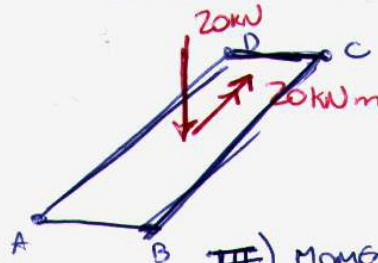
$$\sigma_E = -(4545/a^3) - (5250 / a^3) = -9795/a^3 = -2,9\text{MPa}$$

EXERCÍCIO



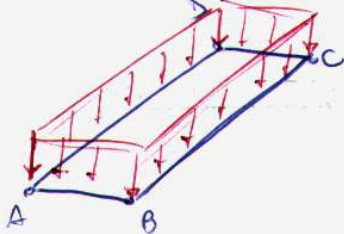
QUAL A DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NORMAIS EM ABCD

I) CARGAS INTERNAS



II) TENSÃO NORMAL

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{20.000}{1 \cdot 0,1} = 200 \text{ kPa}$$

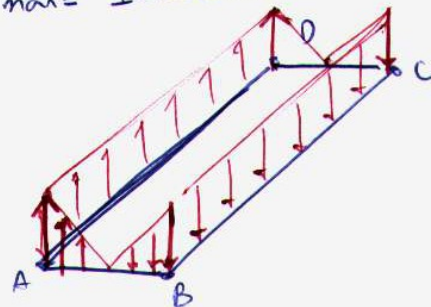


III) MOMENTO FLETOR

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot k}{I} = \frac{M \cdot \frac{h}{2}}{\frac{b \cdot h^3}{12}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2} = \frac{6 \cdot 20.000}{1 \cdot (0,1)^2} = 12 \text{ MPa}$$

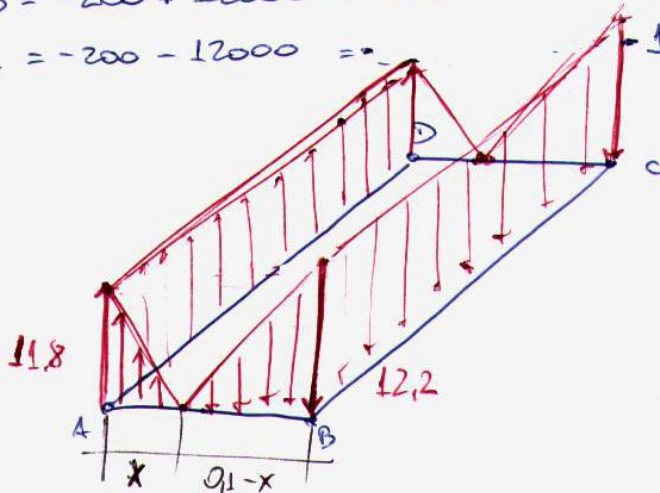
$$\sigma_{max} = 12000 \text{ kPa}$$



IV) COMPOSIÇÃO DOS EFEITOS

$$\sigma_A = \sigma_D = -200 + 12000 = 11800 \text{ kPa} = 11,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \sigma_C = -200 - 12000 = -12200 \text{ kPa} = -12,2 \text{ MPa}$$



V) LINHA NEUTRA

$$\frac{11,8}{x} = \frac{12,2}{(0,1-x)} = 11,8 - 11,8x + 12,2x$$

$$\Rightarrow 24x = 1,18 \Rightarrow x = 0,0492 \text{ m}$$